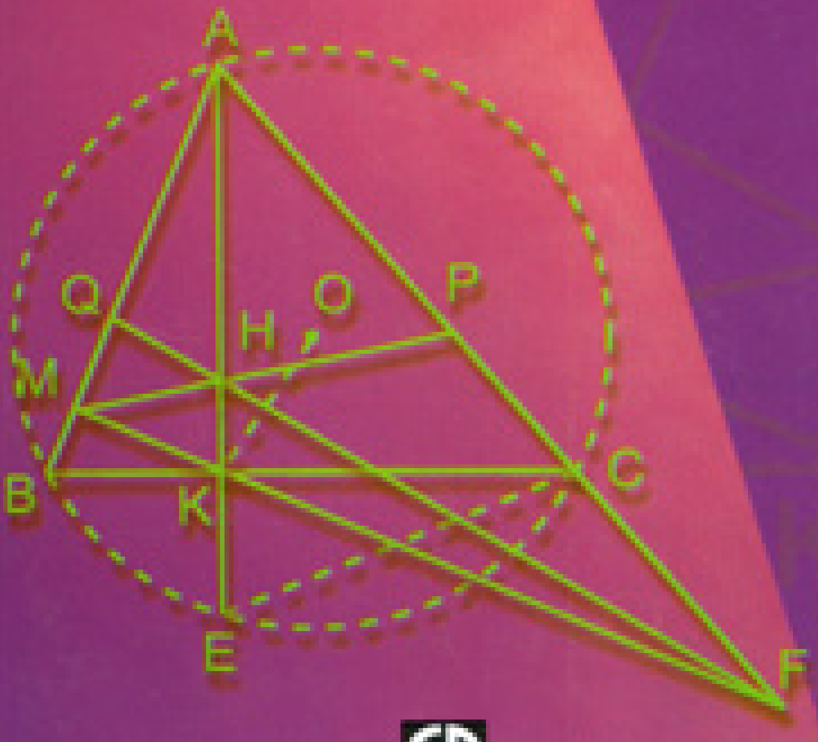
TRẦN VĂN TẤN
và nhóm giáo viên chuyên toán Đại học Sư phạm Hà Nội

CÁC CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC
bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học cơ sở



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN VĂN TẤN
VÀ NHÓM GIÁO VIÊN CHUYÊN TOÁN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

CÁC CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC

BỒI DƯỠNG

HỌC SINH GIỎI TRUNG HỌC CƠ SỞ

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chuyên đề 1

CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ TA-LÉT (THALES) VÀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Định lí Ta-lét và tính chất của tam giác đồng dạng cho phép ta biến đổi một tỉ số giữa độ dài của hai đoạn thẳng hoặc giữa diện tích của hai tam giác thành một tỉ số mới. Trong bài toán sử dụng định lí Ta-lét và tính chất của tam giác đồng dạng ta cần lưu ý những điểm sau :

• Định lí Ta-lét và tính chất của tam giác đồng dạng chỉ đề cập tới tỉ số của hai đối tượng cùng loại (cùng là độ dài của hai đoạn thẳng hay cùng là diện tích của hai tam giác).

• Đối với bài toán cần thực hiện phép toán $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D}$, với A, B, C, D là cùng loại, cần chuyển hai tỉ số trên thành những tỉ số có cùng mẫu số. Tuy nhiên khác với đại số, trong hình học rất hiếm khi ta thực hiện phép nhân chéo quy đồng thành $\frac{A.D \pm B.C}{B.D}$. Trong hình học ta thường dùng định lí Ta-lét hoặc tính chất của tam giác đồng dạng để biến đổi $\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$, $\frac{C}{D} = \frac{M'}{N'}$ sao cho N = N'.

Khi đó $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{M \pm M'}{N}$.

• Đối với bài toán cần thực hiện phép toán $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$, với A, B, C, D là cùng loại, khi đó ta cần biến đổi $\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$, $\frac{C}{D} = \frac{M'}{N'}$ sao cho N = M'. Vậy $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{M}{N'}$.

• Đối với bài toán cần chứng minh đẳng thức có dạng $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$ với A, B, C là cùng loại, ta cần tìm M, N, P cùng loại với A, B, C sao cho M = N = P.

Khi đó đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{M}{A} + \frac{N}{B} = \frac{P}{C}$. Bấy giờ ta có thể dùng định lí Ta-lét hoặc tính chất của tam giác đồng dạng để chứng minh đẳng thức này.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC kéo dài về phía C, lấy một điểm M. Một đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt các cạnh CA, AB tại N và P.

Chứng minh rằng $\frac{BM}{BP} - \frac{CM}{CN}$ không đổi, khi M và Δ thay đổi.

Lời giải. (h.1) nghĩ tới talet vs đồng dạng

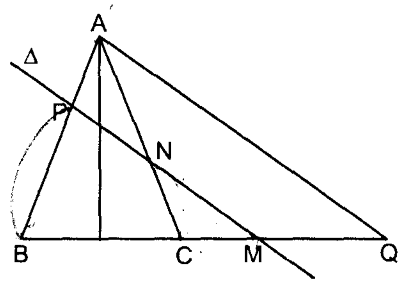
Qua A kẻ đường thẳng song song với Δ cắt BC ở Q.

Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{BM}{BP} = \frac{BQ}{BA}$$

$$\frac{CM}{CN} = \frac{CQ}{CA}$$

hay $$\frac{BM}{BP} - \frac{CM}{CN} = \boxed{\frac{BQ}{BA} - \frac{CQ}{CA}}.$$



Hình 1

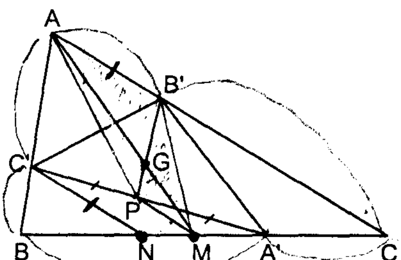
Mặt khác tam giác ABC cân tại A nên

$$\frac{BQ}{BA} - \frac{CQ}{CA} = \frac{BQ - CQ}{BA} = \frac{BC}{BA} \text{ không đổi.}$$

Ví dụ 2. Cho các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của một tam giác ABC, sao cho

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'A}{C'B}.$$

Chứng minh rằng hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.



Hình 2

Lời giải. (h.2)

Do $$\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'A}{C'B}$$

nên $$\frac{A'C}{BC} = \frac{B'A}{CA} = \frac{C'B}{AB} = k$$

(với số k nào đó).

Tính chất tỉ lệ thức

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \to \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

Kẻ C'N // AC (N ∈ BC), ta có $\frac{BN}{BC} = \frac{C'B}{AB} = \frac{A'C}{BC}$ do đó BN = A'C.

Vậy BC và NA' có cùng trung điểm M.

Gọi P là trung điểm của A'C' và G là giao của AM và B'P, ta có

$$\frac{C'N}{AC} = \frac{C'B}{AB} = \frac{B'A}{AC} \text{ suy ra } C'N = B'A.$$

Mặt khác, PM song song và bằng $\frac{1}{2}C'N$ nên PM song song và bằng $\frac{1}{2}AB'$.

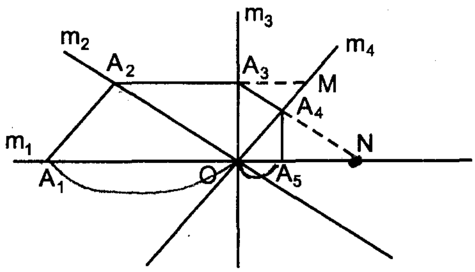
Vậy $\frac{GP}{GB'} = \frac{1}{2} = \frac{GM}{GA}$. Do đó G là trọng tâm chung của hai tam giác ABC và A'B'C'.

Ví dụ 3. Cho bốn đường thẳng theo thứ tự m_1, m_2, m_3, m_4 đồng quy tại O và theo chiều quay của kim đồng hồ. Các điểm A_1, A_2, A_3, A_4 lần lượt trên m_1, m_2, m_3, m_4 sao cho A_1A_2 // m_4, A_2A_3 // m_1, A_3A_4 // m_2. Đường thẳng qua A_4 song song với m_3 cắt m_1 tại A_5. Chứng minh rằng

$$\frac{OA_5}{OA_1} \le \frac{1}{4}.$$

Lời giải. (h.3)

Gọi M là giao của A_2A_3 và m_4, N là giao của m_1 và A_3A_4. Ta có các tứ giác OA_1A_2M, ONA_3A_2 là hình bình hành. Theo định lí Ta-lét ta có



Hình 3

$$\frac{OA_5}{ON} = \frac{A_3A_4}{A_3N} = \frac{MA_4}{OM}$$

và
$$\frac{ON}{OA_1} = \frac{ON}{A_2M} = \frac{A_2A_3}{A_2M} = \frac{OA_4}{OM}.$$

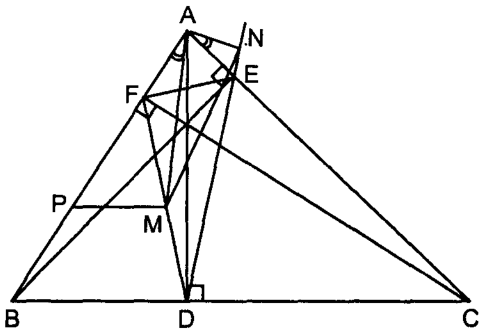
Do đó
$$\frac{OA_5}{OA_1} = \frac{MA_4}{MO}.\frac{OA_4}{MO} \le \frac{1}{4}\left(\frac{MA_4}{MO} + \frac{OA_4}{MO}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$a.b \le \frac{1}{4}(a+b)^2$

Đẳng thức xảy ra khi $MA_4 = OA_4 \Leftrightarrow A_3A_2 = A_3M$. Có nghĩa là m_1, m_2, m_3, m_4 ở vị trí sao cho một đường thẳng song song với một trong bốn đường này sẽ bị ba đường còn lại chắn ra hai đoạn thẳng bằng nhau.

Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF. Một điểm M thuộc đoạn FD, N là một điểm thuộc tia DE sao cho $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng A là tâm đường tròn bàng tiếp góc D của tam giác DMN.

Lời giải. (h.4)



Hình 4

Lấy P thuộc BF sao cho MP // BD. Dễ dàng chứng minh được AD là phân giác góc NDF. Nên để giải bài toán ta chỉ cần chứng minh thêm MA là phân giác của góc nhọn FMN. Ta có

$$\Delta APM \backsim \Delta AEN \text{ (g.g)},$$

do đó $\quad \Delta APE \backsim \Delta AMN$ (c.g.c)

suy ra $\quad \widehat{AMN} = \widehat{APE}$. $\qquad$ (1)

Mặt khác ta có $\Delta AFD \backsim \Delta EFB$ (g.g) mà $\dfrac{PB}{PF} = \dfrac{MD}{MF}$ nên

$$\widehat{AMF} = \widehat{EPF} = \widehat{APE}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{AMF}$ hay MA là phân giác góc FMN, do đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng các tam giác cân AMB, BNC, CPA có các góc ở đỉnh cân lần lượt là $\widehat{AMB} = \alpha$, $\widehat{BNC} = \beta$, $\widehat{CPA} = \gamma$ thoả mãn $\alpha + \beta + \gamma = 360^o$. Chứng minh rằng tam giác MNP có số đo ba góc lần lượt là $\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}, \dfrac{\gamma}{2}$.

Lời giải. (h.5)

Gọi K là điểm sao cho $\Delta MBK \backsim \Delta NCB$, K và A nằm về hai phía của BM. Khi đó $\Delta MAK \backsim \Delta PAC$ suy ra

$$\frac{PA}{MA} = \frac{CA}{KA} \text{ và } \widehat{PAC} = \widehat{KAM}.$$

Do đó $\widehat{PAM} = \widehat{PAC} + \widehat{CAM}$

$= \widehat{KAM} + \widehat{CAM} = \widehat{CAK}$.

Vậy $\Delta PAM \backsim \Delta CAK$ (g.g), nên

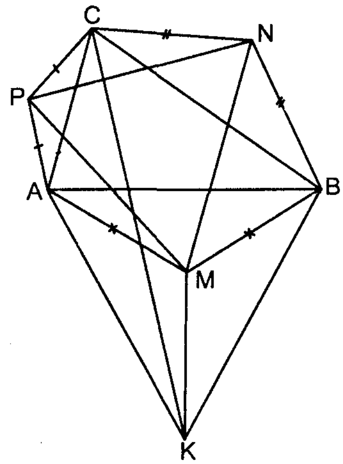
$\widehat{AMP} = \widehat{AKC}$.

Tương tự chứng minh được

$\widehat{BMN} = \widehat{BKM}$.

Vậy $\widehat{AMP} + \widehat{BMN} = \widehat{AKB}$.

Mặt khác M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKB (do MA = MK = MB) nên



Hình 5

$$\widehat{AKB} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{1}{2}(\widehat{AMP} + \widehat{BMN} + \widehat{PMN})$$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{AKB} + \widehat{PMN}).$$

Do đó $\widehat{PMN} = \widehat{AKB} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{\alpha}{2}$.

Chứng minh tương tự cho $\widehat{MNP} = \frac{\beta}{2}$, $\widehat{NPM} = \frac{\gamma}{2}$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài tập

1. Cho tam giác ABC. Biết rằng tồn tại các điểm M và N lần lượt trên các cạnh AB, BC sao cho $2.\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN}$ và $\widehat{BNM} = \widehat{ANC}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O ; r), M là trung điểm của BC. Giao điểm của OM và đường cao AH là E. Chứng minh rằng AE = r.

3. Cho tam giác ABC vuông tại C, đường cao CH. Đường tròn (I ; r) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại P, Q. Giao điểm của CH và PQ là N. Gọi K là trung điểm của BC, KI cắt AC tại M. Chứng minh rằng CM = CN.

4. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$. Chứng minh rằng

$$\frac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

5. Cho tam giác ABC, AD là phân giác trong của góc A. Trên AD lấy M, N sao cho $\widehat{MBA} = \widehat{NBD}$. Chứng minh rằng $\widehat{MCA} = \widehat{NCD}$.

6. Cho tam giác ABC có I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp. AD là đường cao kẻ từ A. Chứng minh rằng ba điểm I, D, O thẳng hàng khi và chỉ khi đường tròn ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC có cùng bán kính.

7. Giả sử D là một điểm nằm trong tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^o$ và AC.BD = AD.BC. Chứng minh rằng $\frac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$.

8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M nằm trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt (O) lần lượt tại các điểm thứ hai A', B', C'. Hạ MA_1, MB_1, MC_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác $A_1B_1C_1$.

9. Cho AB, CD là hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn (O). Đường thẳng Δ vuông góc với CD và cắt tia đối của tia DC. Một tiếp tuyến m thay đổi của (O) cắt AB tại K cắt Δ tại M. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CK, DK với Δ. Chứng minh rằng ME.MF không đổi khi tiếp tuyến m thay đổi.

10. Cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao CH và trung tuyến AD. Đường tròn (O) đi qua D và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A, cắt BC tại điểm thứ hai E. Chứng minh rằng AE đi qua trung điểm của CH.

11. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Hạ $DA_1 \perp BC$, $DB_1 \perp AC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, A_1B_1. Chứng minh rằng tam giác PDQ có dạng không đổi (luôn đồng dạng với chính nó) khi B, C, D cố định còn A thay đổi.

12. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm I nằm trong tam giác ABC. Các tia AI, BI, CI cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm thứ hai A', B', C'. Chứng minh rằng tam giác A'B'C' đều khi và chỉ khi

$$IA : IB : IC = \frac{1}{BC} : \frac{1}{CA} : \frac{1}{AB}.$$

13. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Các tam giác OAD, OBC có trực tâm lần lượt là H, K. Chứng minh rằng HK vuông góc với MN.

14. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) và có hai đường chéo cắt nhau tại I. Hạ IP vuông góc với AD, IQ vuông góc với BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng PQ vuông góc với MN.

15. Cho tứ giác ABCD hai đường chéo AC, BD có độ dài bằng nhau. Về phía ngoài tứ giác dựng các tam giác cân đồng dạng AMB, CND (cân tại M, N). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

Chuyên đề 2

BÀI TOÁN CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM THẲNG HÀNG, CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Để giải bài toán chứng minh các điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy, ta thường sử dụng một trong các phương pháp sau :

1) Sử dụng mối quan hệ về góc (hai góc bằng nhau, tổng hai góc bằng 180^o,...).

2) Sử dụng tiên đề thứ 5 của Ơclit, tiên đề được phát biểu như sau : Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

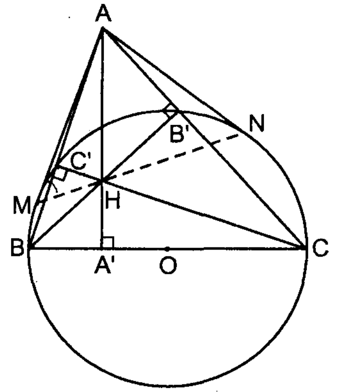
3) Sử dụng tính chất đồng quy của ba đường cao ; ba đường trung tuyến ; ba đường phân giác ; ba đường trung trực trong một tam giác.

4) Dùng phương pháp diện tích.

5) Chuyển bài toán chứng minh các đường thẳng đồng quy về bài toán chứng minh các điểm thẳng hàng.

6) Chuyển bài toán chứng minh các điểm thẳng hàng về bài toán các đường thẳng đồng quy.

Ví dụ 1. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN tới đường tròn đường kính BC. Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng. (Cch)



Hình 6

Lời giải. (h.6)

Gọi AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC, đường tròn (O) có đường kính BC.

Ta có $\quad AM^2 = AB.AC' = AH.AA'$

suy ra $\quad \Delta AHM \backsim \Delta AMA'$

do đó $\quad \widehat{AMH} = \widehat{AA'M}$.

Mặt khác AMA'N là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO nên

$$\widehat{AMH} = \widehat{AA'M} = \widehat{MNA} = \widehat{AMN}.$$

Vậy $\widehat{AMH} = \widehat{AMN}$ mà H và N nằm về cùng một nửa mặt phẳng bờ AM nên M, H, N thẳng hàng.

Ví dụ 2. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm chính giữa của các cung BC, CA, AB không chứa các đỉnh A, B, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Các cạnh BC, CA, AB cắt các cặp đoạn thẳng C'A', A'B' ; A'B', B'C' và B'C', C'A' lần lượt ở các cặp điểm M, N ; P, Q và R, S. Chứng minh rằng các đường chéo MQ, NR, PS của lục giác MNPQRS đồng quy tại một điểm.

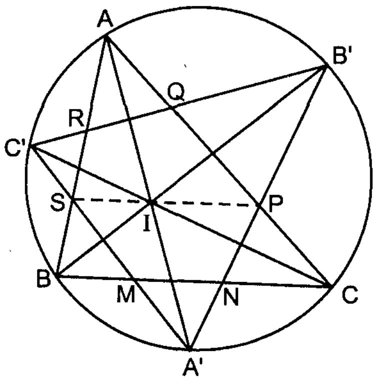
Lời giải. (h.7)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó I nằm trên các đường thẳng AA', BB', CC'.

Ta có $\quad \widehat{A'IC} = \frac{1}{2}\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{ICA'}$.

Suy ra tam giác A'IC cân tại A'. Tương tự tam giác B'IC cân tại B'. Vậy A'B' là trung trực của đoạn IC. Do đó tam giác PIC cân tại P.

Suy ra $\widehat{PIC} = \widehat{PCI} = \widehat{ICB}$ do đó IP // BC.



Hình 7

Tương tự IS // BC. Như vậy I, S, P thẳng hàng. Vậy SP đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tương tự, MQ và RN đều đi qua I. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho tứ giác ABCD. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của BD, AC, MN. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Lời giải. (h.8)

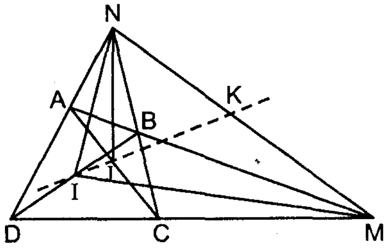
Kí hiệu S_{NIJ} là diện tích của tam giác NIJ. Ta có

$$S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NDI} - S_{NJC} - S_{CIJ} - S_{CID}$$

$$= S_{NDC} - \frac{1}{2}S_{NBD} - \frac{1}{2}S_{NAC} - \frac{1}{2}S_{AIC} - \frac{1}{2}S_{CBD}$$

$$= S_{NDC} - S_{NAB} - \frac{1}{2}S_{ABD} - \frac{1}{2}S_{ABC}$$

$$-\frac{1}{2}(S_{ADC} - S_{ADIC}) -\frac{1}{2}S_{CBD}$$



Hình 8

$$= S_{ABCD} - \frac{1}{2}(S_{ABD} + S_{BCD}) + \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

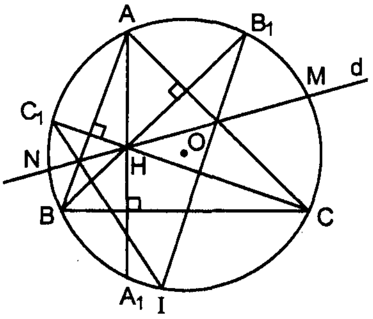
$$-\frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{ADC})$$

$$= \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Tương tự $S_{MIJ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Vậy $S_{NIJ} = S_{MIJ}$. Do đó các khoảng cách từ M và N tới IJ là bằng nhau. Mặt khác M và N nằm về hai phía của IJ, nên IJ đi qua trung điểm của MN.

Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm H là trực tâm tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt đối xứng với H qua BC, CA, AB. Đường thẳng d đi qua H. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng đối xứng với (d) qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.



Hình 9

Lời giải. (h.9)

Do A_1, B_1, C_1 lần lượt đối xứng với H qua BC, CA, AB nên chúng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Các đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt đi qua A_1, B_1, C_1.

Giả sử đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại M, N (M thuộc cung nhỏ CB_1).

Gọi I là giao điểm của d_2 và d_3. Ta có :

$$\widehat{B_1IC_1} = \widehat{B_1HC_1} - \widehat{HC_1I} - \widehat{HB_1I} = \widehat{B_1HC_1} - \widehat{C_1HN} - \widehat{B_1HM}$$

$$= 2\widehat{B_1HC_1} - 180^o = 2(180^o - \widehat{BAC}) - 180^o = 180^o - \widehat{C_1AB_1}$$

Vậy AC_1IB_1 nội tiếp được, do đó I thuộc đường tròn (O).

Tương tự, các cặp đường d_1 và d_2 ; d_1 và d_3 cũng cắt nhau tại một điểm thuộc (O). Mặt khác d_1, d_2, d_3 lần lượt đi qua A_1, B_1, C_1 thuộc (O) và các đường này không phải là các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$. Do đó d_1, d_2, d_3 đồng quy tại một điểm thuộc đường tròn (O).

Ví dụ 5. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H. Một đường tròn đi qua B, C cắt cạnh AC, AB lần lượt tại B', C' (B' ≠ C, C' ≠ B). Gọi H' là trực tâm của tam giác AB'C'. Chứng minh rằng các đường thẳng BB', CC', HH' đồng quy tại một điểm.

Lời giải. (h.10)

Dựng hình bình hành HBIC. Gọi O là giao điểm của BB' và CC', dựng hình bình hành OHCM. Ta có

$\Delta AB'C' \backsim \Delta ABC$ suy ra

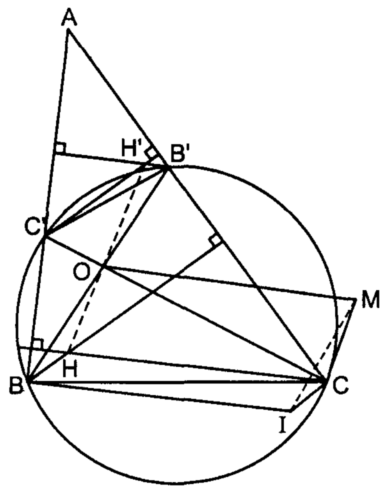
$$\frac{B'H'}{IC} = \frac{B'H'}{BH} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OC}$$

(vì $\Delta OB'C' \backsim \Delta OCB$).

Hơn nữa

$$\widehat{OB'H'} = \widehat{OB'C'} + \widehat{C'B'H'}$$

$$= \widehat{OCB} + \widehat{HBC} = \widehat{OCB} + \widehat{BCI} = \widehat{OCI}$$



Hình 10

nên $\Delta OB'H' \backsim \Delta OCI \Rightarrow \widehat{H'OB'} = \widehat{COI}$. (1)

Ta có

$$\widehat{MIC} = \widehat{OBH} = \widehat{ABH} - \widehat{ABO} = \widehat{ACH} - \widehat{ACO} = \widehat{OCH} = \widehat{COM}.$$

Do đó tứ giác OMCI nội tiếp nên $\widehat{BOH} = \widehat{IMC} = \widehat{COI}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BOH} = \widehat{B'OH'}$. Do H và H' nằm về hai phía của BB' nên ba điểm O, H, H' thẳng hàng.

Vậy HH', BB', CC' đồng quy tại O.

Bài tập

16. Chứng minh rằng các hình chiếu vuông góc của đỉnh A xuống các đường phân giác trong và ngoài các góc B và C của tam giác ABC thẳng hàng.

17. Cho tam giác ABC với các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Chứng minh rằng các hình chiếu vuông góc của A_1 lên AB, AC, BB_1, CC_1 thẳng hàng.

18. Cho góc xOy. Hai điểm A, B thuộc Ox. Hai điểm C, D thuộc Oy. Tìm tập hợp những điểm M nằm trong góc xOy sao cho hai tam giác MAB và MCD có cùng diện tích.

19. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N là trung điểm các đường chéo AC, BD. Chứng minh rằng ba điểm M, N, I thẳng hàng.

20. Cho lục giác ABCDEF có các cặp cạnh đối song song. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, DE, BC, EF, CD, FA. Chứng minh rằng các đường thẳng MN, PQ, RS đồng quy.

21. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác sao cho

$$\widehat{AMB} - \widehat{C} = \widehat{AMC} - \widehat{B}.$$

Chứng minh rằng AM và các đường phân giác của các góc $\widehat{ABM}$, $\widehat{ACM}$ đồng quy.

22. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Vẽ tia Ax vuông góc với AD cắt BC tại E. Vẽ tia Ay vuông góc với AB cắt CD tại F. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

23. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi M, E lần lượt là trung điểm của BC, AD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, M thẳng hàng.

24. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC lần lượt tại A', B'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng A'B', MN và phân giác góc ABC đồng quy.

25. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại M, $\widehat{AMD} = 120^o$, AM = MD. Trên BC, AB và CD lần lượt lấy E, K và P sao cho KE song song với AC, PE song song với BD. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KPE nằm trên AD.

26. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC. Các phân giác trong của các góc ABH, ACH cắt nhau tại P. Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.

27. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Một điểm P thuộc cạnh BC. Các đường thẳng qua P theo thứ tự song song với CG và BG cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Giao điểm của EF với BG và CG là I và J. Chứng minh rằng EI = IJ = JF và PG đi qua trung điểm của EF.

28. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Điểm C thuộc đường tròn (C không trùng với A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C kẻ tia tiếp tuyến Ax với (O). Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Tia BC cắt Ax tại Q, AM cắt BC tại N, AC cắt BM tại P.

a) Chứng minh rằng tam giác ABN cân.

b) Gọi K là điểm chính giữa của cung AB (cung không chứa C). Hỏi có thể xảy ra trường hợp ba điểm Q, M, K thẳng hàng không ?

c) Xác định vị trí của C trên nửa đường tròn tâm O để đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với (O).

Chuyên đề 3

HỌ CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH, TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN CỐ ĐỊNH

Đối với bài toán chứng minh họ các đường thẳng đi qua một điểm cố định hay tiếp xúc với một đường tròn cố định, một vấn đề rất quan trọng là dự đoán được yếu tố cố định nói trên. Muốn dự đoán được điểm cố định (hay đường tròn cố định) mà họ các đường thẳng luôn đi qua (hay tương ứng luôn tiếp xúc) ta thường sử dụng các phương pháp sau.

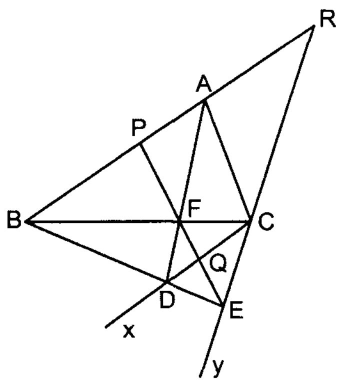
• Giải bài toán trong những trường hợp đặc biệt để thấy được yếu tố cố định cần tìm (điểm hay đường tròn). Từ đó, suy ra trường hợp tổng quát.

• Xét những đường thẳng đặc biệt của họ để suy ra yếu tố cố định cần tìm.

• Dựa vào tính đối xứng, sự bình đẳng của các đối tượng (nếu có) để hạn chế được phạm vi có thể của yếu tố cố định.

• Dùng phép suy diễn để khẳng định : Nếu họ các đường thẳng đi qua một điểm cố định hay tiếp xúc với một đường tròn cố định thì điểm cố định cần tìm hay đường tròn cố định cần tìm bắt buộc phải là một đối tượng cụ thể nào đó.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AC kẻ tia Cx song song với AB và tia Cy sao cho tia Cx nằm ở phần trong của góc BCy. Một đường thẳng bất kì qua B cắt Cx, Cy lần lượt tại D và E. Gọi F là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định.



Hình 11

Lời giải. (h.11)

Gọi P, Q lần lượt là giao của EF với AB, CD và R là giao của tia đối Cy với AB.

Ta có

$$\frac{QC}{QD} = \frac{PR}{PB}, \frac{QC}{QD} = \frac{PB}{PA}.$$

Vậy $\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{PR}{PB}$ hay $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{PR}{BR}$.

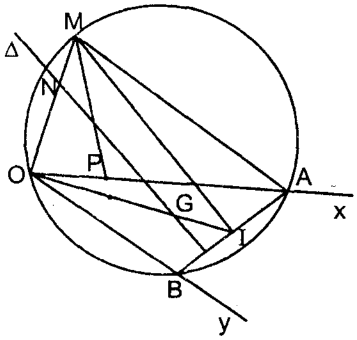
Do đó $\dfrac{PB}{AB} = 1 - \dfrac{PB}{BR}$ suy ra $\dfrac{PB}{AB} + \dfrac{PB}{BR} = 1$ nghĩa là $PB = \dfrac{AB.BR}{AB + BR}$.

Do ba điểm A, B, R cố định nên P cố định.

Vậy EF luôn đi qua P cố định.

Ví dụ 2. Cho hai điểm A và B lần lượt thay đổi trên hai cạnh Ox, Oy của góc nhọn xOy sao cho OA – OB = a không đổi (a dương). Chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn đi qua một điểm cố định. Biết rằng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với AB.

Lời giải. (h.12)



Hình 12

Gọi P là điểm trên Ox sao cho OP = a. Gọi M là giao điểm của đường trung trực của AB với đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB (B và M nằm về hai phía của OA).

Ta có OB = PA, MB = MA và $\widehat{OBM} = \widehat{OAM}$.

Vậy $\Delta MOB = \Delta MPA$ do đó MO = MP suy ra M thuộc đường trung trực của OP. Mặt khác $\widehat{OMP} = \widehat{BMA} = \widehat{xOy}$ không đổi, nên M cố định. Gọi I là trung điểm của AB thế thì Δ // MI suy ra Δ cắt OM tại N sao cho $\frac{ON}{OM} = \frac{OG}{OI} = \frac{2}{3}$.

Vậy Δ đi qua điểm N cố định.

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng BC với trung điểm I và đường thẳng Δ sao cho Δ vuông góc với BC. Điểm A thay đổi trên trung trực của BC sao cho AI lớn hơn khoảng cách từ A tới Δ. Giao điểm của AB, AC với Δ lần lượt là E và F. Gọi M là một điểm thuộc Δ sao cho $AM = \frac{1}{2}EF$. Chứng minh rằng AM luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải. (h.13)

Giả sử M và N thuộc Δ sao cho

$$AM = AN = \frac{1}{2}EF.$$

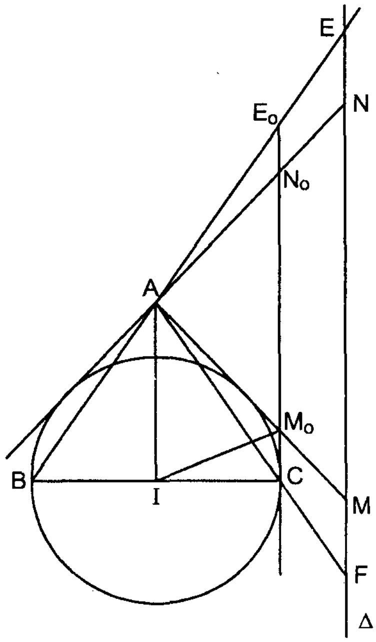
Các đoạn thẳng AM, AN, AE lần lượt cắt đường thẳng qua C song song với Δ tại M_0, N_0, E_0. Ta có

$$AM = AN = \frac{1}{2}EF$$

suy ra $$AM_0 = AN_0 = \frac{1}{2}CE_0$$

nên $$AM_0 = AI = AN_0.$$

Do đó $\widehat{AM_0I} = \widehat{AIM_0} = \widehat{IM_0C}$.



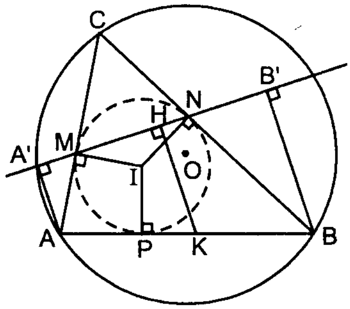
Hình 13

Vậy M_0I là phân giác ngoài góc M_0 của tam giác AM_0N_0. Do tam giác AM_0N_0 cân tại A và AI // M_0N_0 nên AI là phân giác ngoài góc A của tam giác AM_0N_0. Vậy I là tâm đường tròn bàng tiếp góc N_0 của tam giác AM_0N_0. Mặt khác IC $\perp$ M_0N_0 nên đường tròn đường kính BC tiếp xúc với các cạnh của tam giác AM_0N_0. Vậy AM luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính BC cố định.

Ví dụ 4. Cho AB là một dây cung khác đường kính của đường tròn (O). Điểm C thay đổi trên cung lớn AB của đường tròn (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh CA, CB lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải. (h.14)

Giả sử (I) tiếp xúc với AB tại P. Gọi K là trung điểm của AB và A', H, B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, K, B xuống MN.



Hình 14

Ta có, $\widehat{ACB} = \alpha$ không đổi khi C thay đổi.

$$AA' = AM.\sin\widehat{AMA'} = AM.\sin\widehat{CMN}$$

$$= AM.\sin\left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= AP.\sin\left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Tương tự $\quad BB' = PB.\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$

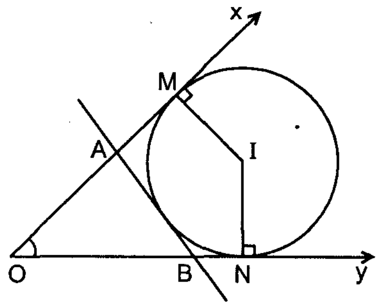
Vậy $\quad KH = \frac{1}{2}(AA' + BB') = \frac{1}{2}(AP + BP)\sin\left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}AB.\sin\left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ không đổi.}$$

Vậy MN luôn tiếp xúc với đường tròn tâm K bán kính

$$R = \frac{1}{2}AB.\sin\left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ví dụ 5. Cho A và B lần lượt thay đổi trên hai cạnh Ox, Oy của góc xOy sao cho chu vi tam giác OAB luôn bằng 2p không đổi. Chứng minh rằng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.



Hình 15

Lời giải. (h.15)

Giả sử đường tròn (I) bàng tiếp góc O của tam giác OAB tiếp xúc với Ox, Oy lần lượt tại M và N.

Khi đó OM + ON = 2p và OM = ON.

Vậy OM = ON = P.

Do đó M và N cố định. Vậy đường tròn (I) cố định. Do đó AB luôn tiếp xúc với (I) cố định.

Bài tập

29. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Qua A kẻ một cát tuyến MN ($M \in (O)$, $N \in (O')$). Chứng minh rằng đường trung trực Δ của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định.

30. Cho điểm B cố định trên cạnh Ax của góc vuông xAy. Điểm C thay đổi trên Ay. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AC, BC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

31. Cho đường tròn (O) và điểm S cố định nằm ngoài (O). Một đường kính AB di chuyển quanh tâm O. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB luôn đi qua hai điểm cố định.

32. Cho đường tròn (O) và hai điểm M, N cố định (M nằm ngoài (O), N nằm trong (O)). Một dây cung AB thay đổi của đường tròn (O) và đi qua N. Hai cát tuyến MA, MB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai lần lượt là C, D ($C \neq A$, $D \neq B$). Chứng minh rằng :

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB đi qua hai điểm cố định.

b) Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định.

33. Cho A là một điểm cố định thuộc cạnh Ox của góc xOy. Một đường tròn (I) tiếp xúc với Ox và Oy lần lượt tại D và C. Tiếp tuyến thứ hai kẻ từ A tới (I) tiếp xúc với (I) tại E. Chứng minh rằng DE luôn đi qua một điểm cố định.

34. Cho tam giác ABC và một đường thẳng Δ không song song với các cạnh của tam giác (A, B, C nằm về một phía của Δ). Một đường tròn thay đổi qua B và C cắt Δ tại M và N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua hai điểm cố định.

35. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn thay đổi tiếp xúc với O_1O_2 tại A và cắt (O_1), (O_2) lần lượt tại B, C. Chứng minh rằng BC luôn đi qua một điểm cố định.

36. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt thay đổi trên các đoạn A_1C, B_1A, C_1B sao cho

$$\widehat{A_1HA_2} = \widehat{B_1HB_2} = \widehat{C_1HC_2}.$$

Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ cố định.

37. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho O_1, O_2 nằm về hai phía của đường thẳng AB. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên (O_1), (O_2) sao cho $\widehat{MBN} = \alpha$ không đổi và M, N nằm về hai phía của AB. Giả sử các tia O_1M và O_2N cắt nhau tại P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN đi qua một điểm cố định.

38. Cho A là một điểm thay đổi trên nửa đường tròn đường kính CB. Hạ AH vuông góc với CB. Gọi (O_1), (O_2) lần lượt là các đường tròn nội tiếp các tam giác CAH, ABH. Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc với O_1O_2 luôn đi qua một điểm cố định.

39. Cho tam giác ABC cân tại A. Hai điểm D và E theo thứ tự thay đổi trên AB, BC. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống BC. Chứng minh rằng nếu $EF = \frac{1}{2}BC$ thì đường thẳng qua E và vuông góc với DE luôn đi qua một điểm cố định.

Chuyên đề 4

BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI ĐƯỜNG CAO, ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN, ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

Trong tam giác ABC ta có :

1) Các bộ ba đường cao, ba đường trung tuyến, ba đường phân giác đồng quy. Tính chất này cho ta một phương pháp chứng minh các đường thẳng đồng quy.

2) Các điều kiện sau là tương đương :

- G là trọng tâm của tam giác ABC.
- G là giao của hai đường trung tuyến của tam giác ABC.
- G thuộc trung tuyến AM (M là trung điểm của BC) và GA = 2GM.
- G nằm trong tam giác ABC và ba tam giác GAB, GBC, GCA có cùng diện tích.

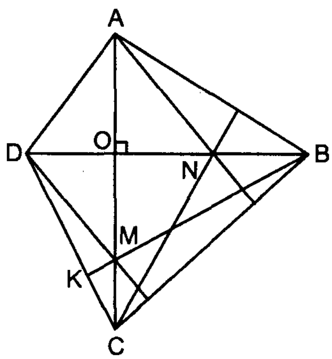
3) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác và AD là đường phân giác trong góc A. Khi đó :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}\ ;\ \frac{IA}{ID} = \frac{AB + AC}{BC}.$$

Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại O. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm M, trên đoạn thẳng OB lấy điểm N sao cho

$$\widehat{OBM} = \widehat{OCD} \text{ và } \widehat{OCN} = \widehat{OBA}.$$

Chứng minh rằng AN // DM.



Hình 16

Lời giải (h.16)

Gọi K là giao điểm của BM với CD.

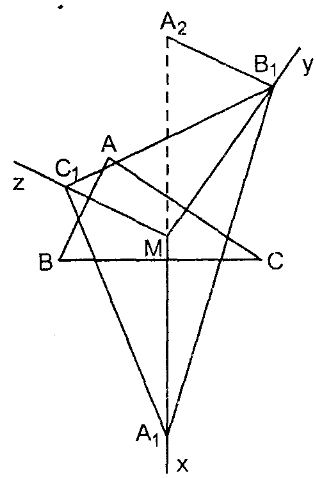
Ta có $\Delta DOC \backsim \Delta DKB$ (g.g).

Suy ra $\widehat{BKD} = \widehat{COD} = 90^{\circ}$.

Vậy tam giác BCD có hai đường cao BK và CO cắt nhau tại M. Do đó DM $\perp$ BC. Tương tự, AN $\perp$ BC. Vậy AN // DM.

Ví dụ 2. Từ một điểm M nằm trong tam giác ABC, kẻ các tia Mx, My, Mz theo thứ tự vuông góc và cắt với BC, AC, AB. Lần lượt lấy A_1, B_1, C_1 sao cho $MA_1 = BC$, $MB_1 = CA$, $MC_1 = AB$. Chứng minh rằng M là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

Lời giải (h.17)



Hình 17

Trên tia đối của tia Mx lấy điểm A_2 sao cho

$$MA_2 = MA_1 = BC.$$

Ta có :

$$\widehat{B_1MA_1} + \widehat{ACB} = 180^o,$$

$$\widehat{A_2MB_1} + \widehat{B_1MA_1} = 180^o.$$

Suy ra $\widehat{A_2MB_1} = \widehat{ACB}.$

Vậy $\Delta A_2MB_1 = \Delta BCA$ do đó $S_{A_2MB_1} = S_{BCA}$.

Mặt khác $S_{A_2MB_1} = S_{A_1MB_1}$

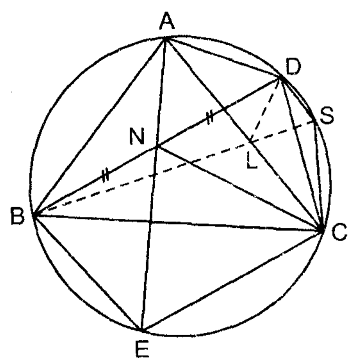
nên $S_{A_1MB_1} = S_{ABC}$.

Tương tự $S_{B_1MC_1} = S_{ABC}$, $S_{C_1MA_1} = S_{ABC}$.

Vậy ba tam giác A_1MB_1, B_1MC_1, C_1MA_1 có cùng diện tích. Do đó M là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

Ví dụ 3. Cho L, N lần lượt là các trung điểm của các đường chéo AC và BD của tứ giác nội tiếp ABCD. Chứng minh rằng nếu BD là phân giác của góc ANC thì AC là phân giác của góc BLD.

Lời giải. (h.18) Dựng hình thang cân BDCE.



Hình 18

Lấy S sao cho ADSC là hình thang cân.

Ta có $\widehat{BNE} = \widehat{CND} = \widehat{AND}$.

Suy ra ba điểm A, N, E thẳng hàng.

Do N là trung điểm của BD nên

$$S_{ABE} = S_{ADE}.$$

Do đó AB.BE = AD.DE mà DE = BC và AD = CS nên

$$AB.BE = AD.BC = CS.CB.$$

Khi đó $$AB.AS = AB.CD = AB.BE = CS.CB.$$

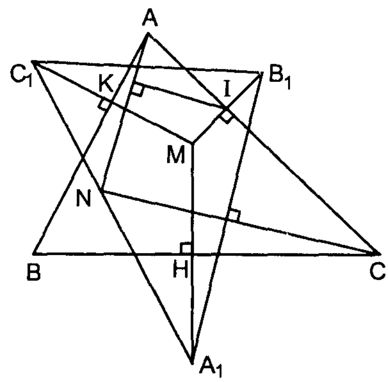
Mặt khác $\widehat{ABS} + \widehat{BCS} = 180^o$ nên $S_{ABS} = S_{BCS}$.

Do đó BS đi qua trung điểm L của đoạn AC.

Suy ra $$\widehat{ALB} = \widehat{SLC} = \widehat{ALD}.$$

Vậy AC là phân giác của góc BLD.

Ví dụ 4. Cho điểm M nằm trong tam giác ABC. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống các cạnh BC, CA, AB. Đường thẳng qua A vuông góc với KI cắt đường thẳng qua C vuông góc với HI tại N. Giả sử $\widehat{HIK} = 90^o$. Chứng minh rằng N là trực tâm của tam giác BHK.



Hình 19

Lời giải (h.19)

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Ta có AN, CN lần lượt là trung trực của B_1C_1, B_1A_1. Do đó N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Mặt khác

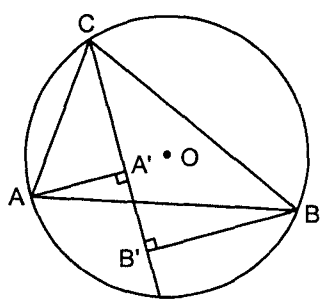
$$\widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{HIK} = 90^o$$

nên N là trung điểm của A_1C_1.

Do đó $KN // MA_1$ suy ra $KN \perp BH$, và $HN // MC_1$ nên $HN \perp BK$.

Vậy N là trực tâm tam giác BHK.

Ví dụ 5. Cho AB là một dây cung khác đường kính của đường tròn (O). Điểm C thay đổi trên cung lớn AB. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B xuống phân giác góc ACB. Chứng minh rằng A', B' thuộc những đường tròn cố định.



Hình 20

Lời giải (h.20)

Phân giác góc ACB luôn đi qua điểm M chính giữa cung nhỏ AB của đường tròn (O).

Khi đó A', B' lần lượt thuộc các đường tròn đường kính AM, BM cố định.

Bài tập

40. Cho tam giác ABC với trung tuyến CM. Điểm D thuộc đoạn BM sao cho BD = 2MD. Biết rằng $\widehat{MCD} = \widehat{BCD}$. Chứng minh rằng $\widehat{ACD} = 90^o$.

41. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm của AC. Đường thẳng qua A vuông góc với BM cắt BC tại D. Tính $\frac{DC}{DB}$.

42. Cho hình vuông ABCD. Điểm M nằm trên đoạn BD. Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CD. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BQ, DP đồng quy.

43. Cho đường thẳng l và tam giác ABC. Các đường thẳng đối xứng với l qua các cạnh của tam giác ABC giới hạn cho ta tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác A'B'C' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

44. Cho tam giác ABC, các đường phân giác BE, CF. Điểm M thuộc đoạn EF. Gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng MP = MQ + MR.

45. Cho hình vuông ABCD, M và N là hai điểm thuộc các cạnh BC, CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^o$. Các đoạn thẳng AM, AN lần lượt cắt BD tại P, Q. Gọi R là giao điểm của MQ và NP. Chứng minh rằng AR vuông góc với MN.

Chuyên đề 5

ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP, ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC

1) Cho tam giác ABC. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

- I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
- I thuộc đường phân giác trong góc A và $\widehat{BIC} = \frac{\widehat{A}}{2} + 90^o$.

• I nằm trong tam giác ABC và $\widehat{BIC} = \dfrac{\widehat{A}}{2} + 90^o$; $\widehat{CIA} = \dfrac{\widehat{B}}{2} + 90^o$.

2) Cho tam giác ABC. Khi đó các điều kiện sau là tương đương :

• J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC.

• J thuộc đường phân giác trong góc A, nằm ngoài tam giác và $\widehat{BJC} = 90^o - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

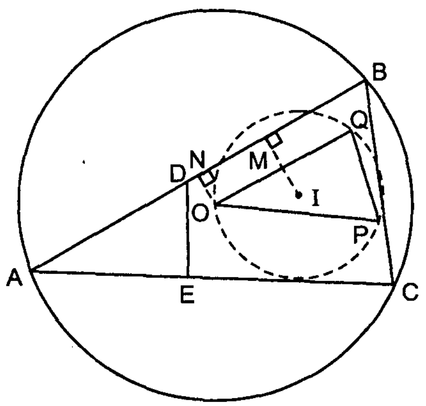
• J thuộc phân giác ngoài góc B và $\widehat{BJC} = 90^o - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

3) Trong một tam giác trung điểm của đoạn nối tâm đường tròn nội tiếp với mỗi tâm đường tròn bàng tiếp nằm trên đường tròn ngoại tiếp.

4) Trong một tam giác, tâm đường tròn nội tiếp là trực tâm của tam giác có ba đỉnh là ba tâm đường tròn bàng tiếp.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có cạnh BC nhỏ nhất. Trên AB, AC lần lượt lấy hai điểm D, E sao cho DB = BC = CE. Chứng minh rằng khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

Lời giải (h.21). Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.



Hình 21

Hạ ON và IM vuông góc với AB. Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Xét tam giác OPQ nhận I làm tâm đường tròn ngoại tiếp và OQ // AB, OP // AC.

Ta có

$$OQ = 2MN = 2(BN - BM)$$

$$= 2\left(\frac{c}{2} - \frac{a+c-b}{2}\right) = b - a = AE.$$

Tương tự AD = OP.

Xét hai tam giác QOP và EAD có:

$$OQ = AE,\ OP = AD \text{ và } \widehat{POQ} = \widehat{DAE}.$$

Suy ra ΔQOP = ΔEAD (c.g.c). Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lấy một điểm M. Gọi N là một điểm nằm trong tam giác. Các điểm A', B', C' lần lượt đối xứng với M qua AN, BN, CN. Biết rằng AA', BB', CC' song song với nhau. Chứng minh rằng N là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

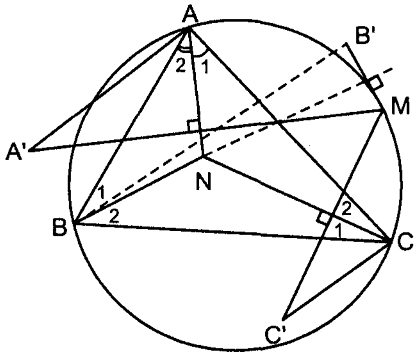
Lời giải (h.22)

Không mất tính tổng quát có thể coi M thuộc cung AC (cung không chứa B).

Dễ dàng chứng minh được AA' // CC' nên

$$\widehat{A'AC} + \widehat{C'CA} = 180^o.$$

do đó



Hình 22

$$\widehat{A'AN} + \widehat{A}_1 + \widehat{C'CN} + \widehat{C}_2 = 180^o$$

$$\Rightarrow \widehat{MAN} + \widehat{A}_1 + \widehat{MCN} + \widehat{C}_2 = 180^o$$

$$\Rightarrow \widehat{MAC} + 2\widehat{A}_1 + \widehat{MCA} + 2\widehat{C}_2 = 180^o$$

$$\Rightarrow \widehat{MBC} + 2\widehat{A}_1 + \widehat{MBA} + 2\widehat{C}_2 = 180^o$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + 2(\widehat{A}_1 + \widehat{C}_2) = 180^o$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + 2(180^o - \widehat{ANC}) = 180^o$$

$$\Rightarrow \widehat{ANC} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

Tương tự $\widehat{ANB} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{ACB}$

$$\widehat{BNC} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Vậy N là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

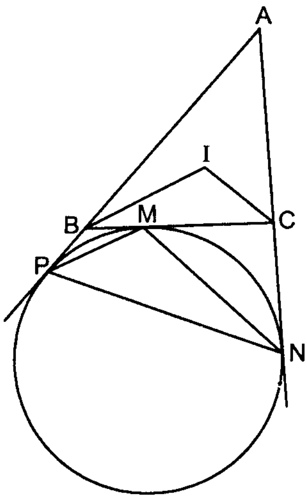
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I. Đường tròn bàng tiếp góc A tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng

$$S_{MNP} < 4S_{IBC}.$$

Lời giải (h.23)

Ta có $\widehat{MNP} = \widehat{ANP} - \widehat{CNM}$

$$= \left(90^o - \frac{1}{2}\widehat{A}\right) - \left(90^o - \frac{1}{2}\widehat{NCM}\right)$$



Hình 23

$$= \frac{1}{2}\widehat{NCM} - \frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) - \frac{1}{2}\widehat{A}$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{IBC}.$$

Vậy $\widehat{MNP} = \widehat{IBC}$. Tương tự $\widehat{MPN} = \widehat{ICB}$.

Vậy $\Delta IBC \backsim \Delta MNP$ (g.g).

Suy ra $$\frac{S_{IBC}}{S_{MNP}} = \left(\frac{BC}{PN}\right)^2. \qquad (1)$$

Ta có $$BC = \frac{1}{2}(PB + BC + CN) > \frac{1}{2}PN$$

do đó $$\frac{BC}{PN} > \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

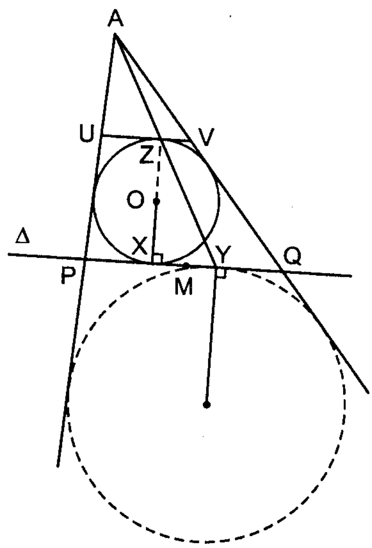
Ví dụ 4. Gọi Δ là một tiếp tuyến của đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên đường thẳng Δ. Hai điểm P và Q thay đổi trên Δ sao cho M là trung điểm của đoạn PQ. Các tiếp tuyến (khác Δ) của (O) qua P, Q cắt nhau tại A. Chứng minh rằng A thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải (h.24)

Ta dễ dàng nhận thấy (O) hoặc là đường tròn nội tiếp hoặc là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác APQ.

Trường hợp 1 . Nếu (O) là đường tròn nội tiếp tam giác APQ. Gọi X là tiếp điểm của Δ với (O), Y là điểm đối xứng với X qua M. Khi đó Y là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác APQ với cạnh PQ.

Gọi Z là điểm đối xứng với X qua tâm đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại Z cắt AP, AQ lần lượt tại U, V. Ta có UV // PQ và (O) là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác AUV. Ta có



Hình 24

b) OH cắt AB, AC lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng chu vi tam giác AEF bằng AB + AC.

c) Chứng minh rằng $OH = |AB - AC|$.

47. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I ; r). Điểm M thuộc cạnh BC, đường tròn $(I_1 ; r_1)$ nội tiếp tam giác AMC. Các điểm B', C' lần lượt thuộc cạnh AB, AC sao cho B'C' song song với BC và B'C' tiếp xúc với $(I_1 ; r_1)$. Gọi N là giao của AM với B'C' và $(I_2 ; r_2)$ là đường tròn nội tiếp tam giác AB'N. Chứng minh rằng $r_1 + r_2 = r$.

48. Cho tam giác ABC, hai điểm M và N thuộc cạnh BC. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ABN, CAN, ACM. Chứng minh rằng $r_1 = r_3$ khi và chỉ khi $r_2 = r_4$.

49. Cho tam giác ABC. Gọi r, r_A, r_B, r_C lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC.

Chứng minh rằng $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$.

50. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, ACH. Đường thẳng O_1O_2 cắt AB, AC tại lần lượt M, N. Chứng minh rằng AM = AN.

51. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm A_o, B_o lần lượt là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A), $\overset{\frown}{CA}$ (không chứa B). Đường tròn (A_o) tiếp xúc với cạnh BC, đường tròn (B_o) tiếp xúc với cạnh AC. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thuộc một tiếp tuyến chung của (A_o) và (B_o).

52. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Các điểm M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (O) với AB, BC, CD, DA. Gọi (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) lần lượt là các đường tròn nội tiếp các tam giác AMQ, BMN, CNP, DPQ. Gọi Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 lần lượt là các tiếp tuyến chung ngoài của các cặp đường tròn (O_1) và (O_2) ; (O_2) và (O_3) ; (O_3) và (O_4) ; (O_4) và (O_1) (các tiếp tuyến chung này không chứa cạnh của tứ giác ABCD). Chứng minh rằng Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 giới hạn cho ta một hình thoi.

Chuyên đề 6

TỨ GIÁC NỘI TIẾP

• Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại N, hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại M (h.26). Khi đó các điều sau tương đương :

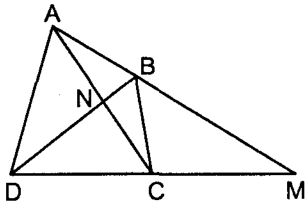
i) Tứ giác ABCD nội tiếp ;

ii) $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$;

iii) $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^o$;

iv) MA.MB = MC.MD ;

v) NA.NC = NB.ND.



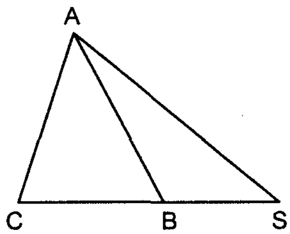
Hình 26

• Cho tam giác ABC và điểm S thuộc tia đối của tia BC (h.27). Khi đó các điều sau tương đương :

i) SA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC;

ii) $\widehat{ACB} = \widehat{BAS}$;

iii) $SA^2 = SB.SC$.



Hình 27

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Các đường thẳng BI, CI lần lượt cắt EF tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm B, M, N, C thuộc cùng một đường tròn.

Lời giải (h.28)

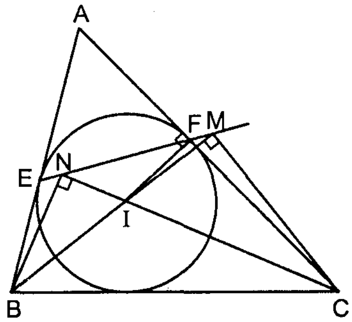
• Nếu M thuộc tia đối của tia EF, ta có

$$\widehat{MIC} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^o - \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$= \widehat{AFE} = \widehat{MFC}.$$

Vậy tứ giác IFMC nội tiếp do đó

$$\widehat{BMC} = \widehat{IFC} = 90^o.$$

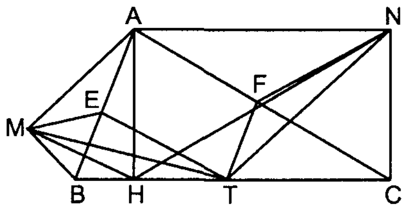


Hình 28

• Nếu M thuộc đoạn EF, bằng cách làm tương tự ta cũng suy ra $\widehat{BMC} = 90^o$. Vậy ta luôn có $\widehat{BMC} = 90^o$. Tương tự $\widehat{BNC} = 90^o$. Do đó bốn điểm B, C, M, N thuộc cùng một đường tròn.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC, AH là đường cao xuất phát từ A. Về phía ngoài tam giác dựng các tam giác vuông AMB và ANC đồng dạng với nhau (vuông tại M, N). Gọi T là trung điểm của BC, chứng minh rằng các điểm T, H, M, N thuộc cùng một đường tròn.

Lời giải (h.29)



Hình 29

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Do các tam giác AMB và ANC đồng dạng với nhau suy ra

$\Delta EMT \backsim \Delta FTN$ do đó $\widehat{EMT} = \widehat{FTN}$. (1)

Do AMBH, AHCN là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BHM} = \widehat{BAM}$, $\widehat{CHN} = \widehat{CAN}$.

Mặt khác $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$ nên

$$\widehat{MHN} = 180^o - \widehat{BHM} - \widehat{CHN} = 180^o - 2\widehat{BAM} = 180^o - \widehat{BEM}$$

$$= \widehat{EMT} + \widehat{BET} + \widehat{ETM} = \widehat{EMT} + \widehat{ETF} + \widehat{ETM}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MHN} = \widehat{FTN} + \widehat{ETF} + \widehat{ETM} = \widehat{MTN}$.

Vậy các điểm M, H, T, N thuộc cùng một đường tròn.

Ví dụ 3. Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{B} = 60^o$. Một đường thẳng đi qua D không cắt hình thoi nhưng cắt các đường thẳng AB, BC lần lượt tại E, F. Gọi M là giao điểm của AF, CE. Chứng minh rằng AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF.

Lời giải (h.30)

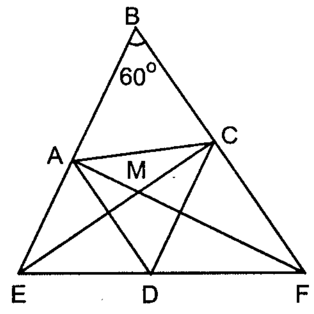
Ta có $\Delta AED \backsim \Delta CDF$ nên

$$\frac{AE}{AD} = \frac{CD}{CF} \text{ hay } \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{CF}.$$

Mặt khác $\widehat{CAE} = \widehat{FCA}$ nên $\Delta AEC \backsim \Delta CAF$.

Suy ra $\widehat{ACE} = \widehat{CFA}$, do đó $\Delta ACM \backsim \Delta AFC$.

Suy ra $\frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AF}$ hay $AC^2 = AM.AF$. Do đó $AD^2 = AM.AF$.



Hình 30

Vậy AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF.

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O_1). Các tia AB và CD cắt nhau tại M, các tia AD và BC cắt nhau tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN cắt (O_1) tại điểm B' khác B. Chứng minh rằng B'D đi qua trung điểm của MN.

Lời giải (h.31)

Gọi I là giao điểm của B'D với MN.

Ta có $\widehat{IMB'} = 180^o - \widehat{B'BC} = \widehat{B'DC}$

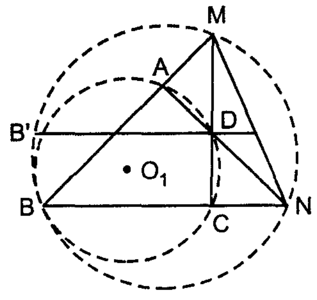
nên $\widehat{IMD} = \widehat{IMB'} - \widehat{DMB'}$

$= \widehat{B'DC} - \widehat{DMB'} = \widehat{MB'D}$.

Do đó IM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác B'DM suy ra $IM^2 = ID.IB'$.

Tương tự $IN^2 = ID.IB'$.

Vậy IM = IN, ta có điều phải chứng minh.



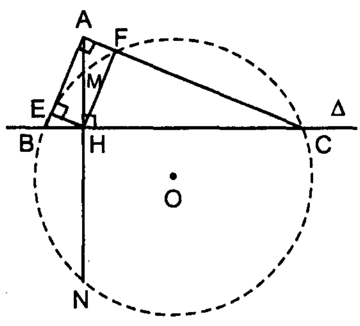
Hình 31

Ví dụ 5. Cho đường thẳng Δ và một điểm A cố định nằm ngoài Δ, H là hình chiếu vuông góc của A xuống Δ. Hai điểm B, C thay đổi trên Δ sao cho góc BAC vuông. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H xuống AB, AC. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm B, E, F, C thuộc cùng một đường tròn (O) ;

b) Đường tròn O) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải (h.32)



Hình 32

a) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$AE.AB = AH^2 = AF.AC.$$

Vậy các điểm B, E, F, C thuộc cùng một đường tròn.

b) Gọi M, N lần lượt là các giao điểm của (O) với AH (M thuộc đoạn AH).

Ta có

$$HM.HN = HB.HC = AH^2. \qquad (1)$$

Mà $\quad AH^2 = AE.AB = AM.AN = (AH - HM)(AH + HN)$

$= AH^2 - HM.HN + AH(HN - HM).$

Suy ra $$HN - HM = AH. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$HN - HM = AH \text{ và } HN.HM = AH^2$$

do đó $$HM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AH \text{ và } HN = \frac{\sqrt{5}+1}{2}AH.$$

Vậy (O) luôn đi qua M, N cố định.

Bài tập

53. Cho tứ giác ABCD, AB và DC cắt nhau tại M, AD và CB cắt nhau tại N. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi các phân giác của các góc $\widehat{AMD}$ và $\widehat{DNC}$ vuông góc với nhau.

54. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{ABC} > 90^o$. Hạ DA', DC', DD' lần lượt vuông góc với AB, BC, AC. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng các điểm A', O, C', D' thuộc cùng một đường tròn.

55. Đường phân giác góc $\widehat{BAD}$ của hình bình hành ABCD cắt cạnh BC và đường thẳng CD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng :

a) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

b) Nếu K là giao của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác CMN, BCD ($K \neq C$) thì $\widehat{AKC} = 90^o$.

56. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là một điểm thuộc cạnh huyền BC và E là điểm đối xứng với D qua AB. Gọi G là giao điểm của AB với DE. Từ giaỏ điểm H của AB và CE hạ HI vuông góc với BC. Các tia CH, IG cắt nhau tại K. Chứng minh rằng KC là phân giác của góc IKA.

57. Cho tam giác ABC, đường cao AD. Gọi E, F là hai điểm nằm trên một đường thẳng qua D sao cho $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^o$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, EF. Chứng minh rằng $\widehat{ANM} = 90^o$.

58. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BB_1, CC_1. Đường thẳng B_1C_1 cắt BC tại M. Gọi O là trung điểm của BC. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC_1 và OCB_1 cắt nhau tại điểm thứ hai P. Chứng minh rằng $\widehat{OPM} = 90^o$.

59. Cho tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.

60. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt trên một đường tròn sao cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại E. Trên đoạn BE lấy điểm M khác B và E. Tiếp tuyến tại E của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEM cắt BC và AC tại F, G. Tính tỉ số $\frac{EG}{EF}$ theo $t = \frac{AM}{AB}$.

61. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cạnh BC. Các đường trung trực của các đoạn BM, CM theo thứ tự đó cắt AB, AC lần lượt tại C', B'. Gọi A' là điểm đối xứng với M qua B'C'. Chứng minh rằng AA'BC nội tiếp một đường tròn.

62. Cho tam giác ABC không cân, M là trung điểm của cạnh BC. Đường cao AD kẻ từ A của tam giác. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C xuống đường kính qua A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

63. Cho các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho tứ giác ANMP là một hình bình hành. Gọi D là điểm đối xứng với M qua NP. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ tam giác ABC cân tại A.

Chuyên đề 7

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

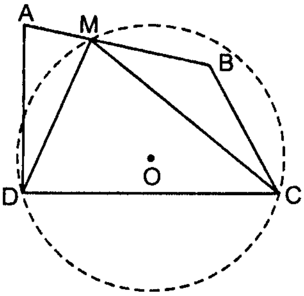
Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD, M là điểm thuộc cạnh AB. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{CMD} \geq \min\{\widehat{CAD}, \widehat{CBD}\}$;

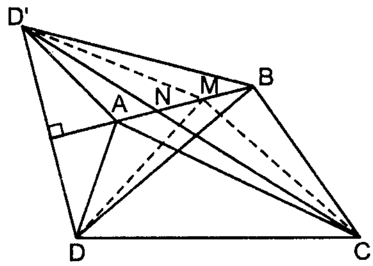
b) $MC + MD \leq \max\{AC + AD, BC + BD\}$.

Lời giải

a) (h.33) Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác MCD. Do đoạn thẳng AB cắt (O) tại M nên trong hai điểm A và B phải có ít nhất một điểm không thuộc phía trong đường tròn (O). Không mất tính tổng quát có thể giả sử điểm A không nằm phía trong đường tròn (O). Khi đó $\widehat{CMD} \geq \widehat{CAD}$, ta có điều phải chứng minh.



Hình 33



Hình 34

b) (h.34)

Gọi D' là điểm đối xứng của D qua AB. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD'.

Do M thuộc đoạn AB nên hoặc M thuộc đoạn NA hoặc M thuộc đoạn NB. Do đó

$$MD' + MC \leq AD' + AC \text{ hoặc } MD' + MC \leq BD' + BC$$

suy ra $\quad MD + MC \leq AD + AC$ hoặc $MD + MC \leq BD + BC$.

Suy ra $MC + MD \leq \max\{AC + AD, BC + BD\}$.

Chú ý. Trong lời giải của câu a) ta đã nêu ra được đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác DMC với tính chất : nó chia nửa mặt phẳng chứa tứ giác ABCD bờ CD thành ba phần, những điểm nằm ngoài, nằm trên và nằm trong đường tròn theo thứ tự đó nhìn đoạn CD dưới những góc nhỏ hơn, bằng, lớn hơn góc $\widehat{CMD}$. Vì vậy để chứng minh kết luận a) ta cần phải chứng minh có ít nhất một trong hai điểm A, B không nằm phía trong đường tròn (O).

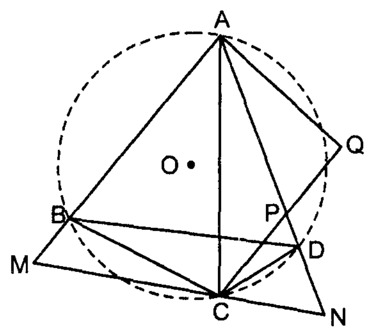
Theo cách tư duy này, nếu biết khái niệm về elip ta cũng có thể đạt được một cách giải khác cho câu b) bằng cách gọi (E) là tập những điểm P sao cho PC + PD = MC + MD, khi đó (E) là elip đi qua M và có hai tiêu điểm C và D. Elip (E) có tính chất : nó chia mặt phẳng thành ba phần, những điểm nằm ngoài, nằm trên, nằm trong (E) theo thứ tự đó có tổng các khoảng cách tới C và tới D lớn hơn, bằng, bé hơn MC + MD.

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng qua C cắt các tia đối của tia BA, DA lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng

$$\frac{4S_{BCD}}{S_{AMN}} \le \left(\frac{BD}{AC}\right)^2.$$

Lời giải (h.35)

Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại P, kéo dài CP lấy Q sao cho P là trung điểm của CQ (h.35).



Hình 35

Ta có

$$\widehat{BCD} = 180^o - \widehat{BAD} = \widehat{APC},$$

nên $\Delta BCD \backsim \Delta APC$.

Suy ra $\quad \dfrac{S_{BCD}}{S_{APC}} = \left(\dfrac{BD}{AC}\right)^2. \qquad (1)$

Ta có PQ = PC nên $S_{APQ} = S_{APC}$, mặt khác hai tam giác AMC và APQ có $\widehat{A} = \widehat{P}$ nên

$$\frac{S_{APC}}{S_{AMN}} = \frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{PA.PQ}{AM.AN} = \frac{PA}{AN}.\frac{CP}{AM}$$

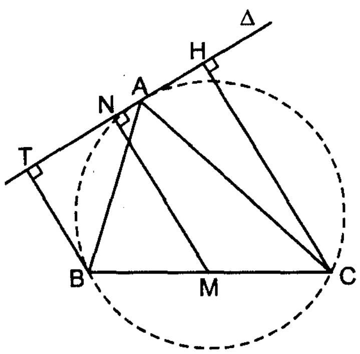
$$= \frac{MC}{MN}.\frac{NC}{MN} \le \frac{1}{4}\left(\frac{MC}{MN} + \frac{NC}{MN}\right)^2 = \frac{1}{4}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nhọn, trung tuyến AM có độ dài m_a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}(b\sin B + c\sin C) \le m_a.$$

Lời giải. (h.36)



Hình 36

Gọi Δ là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi T, N, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, M, C xuống Δ.

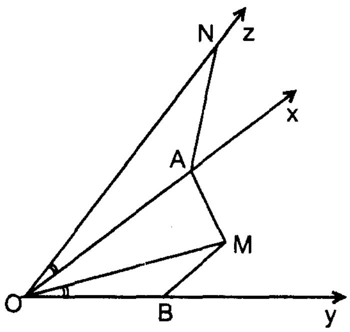
Ta có $\widehat{B} = \widehat{HAC}$, $\widehat{C} = \widehat{THB}$.

Do đó $$b\sin B = b\sin\widehat{HAC} = CH,$$
$$c\sin C = c\sin\widehat{BAT} = BT.$$

Suy ra $\frac{1}{2}(b\sin B + c\sin C) = \frac{1}{2}(BT + CH) = MN \le AM = m_a.$

Ví dụ 4. Cho điểm M nằm trong góc nhọn xOy. Hai điểm A và B lần lượt thay đổi trên Ox, Oy sao cho 2.OA = 3.OB. Tìm vị trí của A, B sao cho 2MA + 3MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. (h.37)



Hình 37

Trong nửa mặt phẳng bờ Ox không chứa Oy vẽ tia Oz sao cho $\widehat{xOz} = \widehat{yOM}$.

Trên tia Oz lấy N sao cho 2.ON = 3.OM. Khi đó ΔNOA ∽ ΔMOB (c.g.c).

Do đó $\frac{AN}{BM} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{2}$ nên 2NA = 3BM.

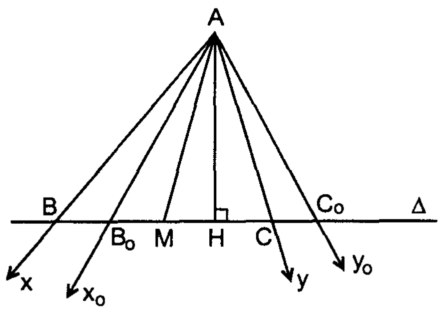
Vậy 2MA + 3MB = 2(MA + NA) ≥ 2MN. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A là giao của đoạn MN với tia Ox.

Vậy 2MA + 3MB bé nhất khi A là giao của đoạn MN với tia Ox và B thuộc tia Oy sao cho 2.OA = 3.OB.

Ví dụ 5. Cho đường thẳng Δ và một điểm A cố định không thuộc đường thẳng đó. Góc xAy có số đo không đổi quay quanh A sao cho Ax, Ay cắt Δ tại B, C. Tìm vị trí của góc đó để BC có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. (h.38)

Xét vị trí góc Ax_0y_0 sao cho Ax_0, Ay_0 cắt Δ lần lượt tại B_0, C_0 và tam giác AB_0C_0 cân tại A, $\widehat{xAy} = \widehat{x_0Ay_0}$. Giả sử C thuộc B_0C_0, hạ AH vuông góc với Δ, gọi M là điểm đối xứng với C qua H. Ta có



Hình 38

$$CC_o = MB_o. \quad (1)$$

Do $\widehat{x_0Ay_0} = \widehat{xAy}$ nên $\widehat{BAB_o} = \widehat{CAC_o} = \widehat{MAB_o}$.

Vậy AB_o là phân giác của góc MAB. Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{BB_o}{MB_o} = \frac{AM}{AB} \leq 1$$

do đó $$BB_o \geq MB_o. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $CC_o \leq BB_o$ suy ra $BC \geq B_oC_o$.

Vậy BC có độ dài bé nhất khi tam giác ABC cân tại A.

Bài tập

64. Cho tam giác ABC cân tại A. Hai điểm K, L thuộc cạnh đáy BC sao cho $\widehat{KAL} \leq \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $KL \leq \frac{1}{2}BC$.

65. Về phía ngoài của tam giác ABC dựng các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 sao cho tổng diện tích của ba tam giác này nhỏ hơn diện tích tam giác ABC. Qua A_1, B_1, C_1 vẽ các đường thẳng tương ứng song song với BC, CA, AB. Chúng cắt nhau tạo thành tam giác MNP. Chứng minh rằng

$$S_{MNP} < 2S_{A_1CB_1AC_1B}.$$

66. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên AB, AC lấy K, L sao cho AK = AH = AL. Chứng minh rằng

$$S_{AKL} \leq \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

67. Cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm M thuộc cạnh BC gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống AB, AC. Tìm vị trí của M để DE đạt giá trị nhỏ nhất.

68. Cho đường tròn (O ; R) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Một đường thẳng Δ thay đổi quanh A cắt (O ; R) tại M, N. Tìm vị trí của Δ để AM + AN lớn nhất.

69. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Tìm vị trí đường thẳng Δ đi qua A sao cho:

a) $d_{B/\Delta} + d_{C/\Delta}$ đạt giá trị lớn nhất ;

b) $d_{B/\Delta} + 2d_{C/\Delta}$ đạt giá trị lớn nhất.

(Ở đó $d_{B/\Delta}$ là khoảng cách từ B tới Δ).

70. Cho đường tròn (O) và điểm P cố định nằm trong (O) khác tâm O. Hai dây cung AC và BD thay đổi của (O) và vuông góc với nhau tại P. Tìm vị trí của AC và BD sao cho :

a) Diện tích tứ giác ABCD bé nhất ? lớn nhất ?

b) Chu vi tứ giác ABCD bé nhất ? lớn nhất ?

71. Cho tam giác ABC không cân ngoại tiếp đường tròn (I ; r). Xác định vị trí của điểm M trên đường tròn (I ; r) sao cho tổng các khoảng cách từ M tới các cạnh tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất, bé nhất.

72. Cho tam giác nhọn ABC, điểm M thay đổi trên cạnh BC. Gọi P, Q lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để PQ đạt giá trị nhỏ nhất.

Chuyên đề 8

TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

Ví dụ 1. Trên mặt phẳng cho 2005 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn sao cho trong số 2005 điểm nói trên có 1000 điểm nằm phía trong đường tròn, các điểm còn lại nằm phía ngoài đường tròn.

Lời giải. Giả sử các điểm đã cho là $A_1, ..., A_{2005}$. Xét tất cả các đường trung trực của các đoạn nối hai điểm bất kì trong số 2005 điểm này. Lấy O là một điểm không nằm trên bất kì đường trung trực nào trong số nói trên. Khi đó các khoảng cách từ O tới các điểm $A_1, ..., A_{2005}$ đôi một phân biệt. Không mất tính tổng quát, giả sử $OA_1 < OA_2 < ... < OA_{2005}$. Lấy R sao cho $OA_{1000} < R < OA_{1001}$. Khi đó đường tròn (O ; R) thoả mãn bài toán.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng kẻ 2004 đường thẳng sao cho không có ba đường nào đồng quy. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho được gọi là "tam giác xanh" nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt .

a) Chứng minh rằng số tam giác xanh không ít hơn 668.

b) Chứng minh rằng số tam giác xanh không ít hơn 1336.

Lời giải

a) Lấy một đường thẳng d bất kì trong số 2004 đường đã cho. Xét một cặp đường thẳng a và b trong số 2003 đường còn lại có khoảng cách từ giao của a và b tới d là bé nhất (so với các khoảng cách từ giao của các cặp đường thẳng khác tới d). Ba đường thẳng a, b, d giới hạn cho ta một tam giác xanh. Vậy với mỗi đường thẳng d trong số 2004 đường ta nhìn ra một tam giác xanh, tuy nhiên theo cách này mỗi tam giác xanh được tính ba lần. Do đó số các tam giác xanh không ít hơn 2004 : 3 = 668.

b) Theo cách làm ở câu a) nếu về hai phía của đường thẳng d đều có các giao điểm của các cặp đường thẳng khác thì ứng với d có hai tam giác xanh nằm về hai phía của d.

Ta chứng minh rằng có không quá hai đường thẳng mà tất cả các giao điểm của các cặp đường thẳng khác nằm về cùng một phía so với đường thẳng đó. Thật vậy giả sử có ba đường d_1, d_2, d_3 như vậy. Xét đường thẳng thứ tư d_4. Gọi M_1, M_2, M_3 là giao của d_4 với d_1, d_2, d_3. Giả sử M_2 ở giữa M_1 và M_3. Khi đó M_1 và M_3 nằm về hai phía của d_2 : vô lí. Như vậy ứng với 2004 đường thẳng sẽ có ít nhất $(2002 \times 2 + 2 \times 2) : 3$ tam giác xanh. Do đó số tam giác xanh không ít hơn 1336.

Ví dụ 3. Cho một bảng kẻ ô vuông 2000×2000, mỗi ô có kích thước 1. Trên bảng ta vẽ một đường tròn có bán kính 10 sao cho nó không đi qua bất kì đỉnh nào cũng như không tiếp xúc nó với bất kì cạnh nào của các ô vuông.

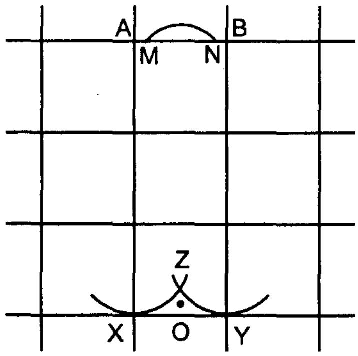
a) Tìm số giao điểm của đường tròn với các cạnh của các ô vuông.

b) Gọi m là số ô vuông bị đường tròn cắt. Chứng minh rằng hoặc m = 80 hoặc m = 79.

Lời giải

a) Đường tròn có đường kính 20, không tiếp xúc với cạnh nào của các ô vuông nên cắt 20 đường thẳng nằm ngang và 20 đường thẳng đứng (các đường kẻ của bảng ô vuông), mỗi đường thẳng trong số này cắt đường tròn tại hai điểm. Vậy có cả thảy $(20 + 20) \times 2 = 80$ giao điểm, chúng đôi một phân biệt vì đường tròn không đi qua đỉnh của các ô vuông.

b) 80 giao điểm nói trên chia đường tròn thành 80 cung, rõ ràng mỗi cung nằm trong một ô vuông.



Hình 39

• Trong số các ô này không thể có ô nào chứa tới ba cung vì nếu trái lại đường tròn sẽ giao với bốn cạnh của một ô vuông, khi đó bán kính của nó nhỏ hơn 10.

• Nếu trong các ô vuông này có một ô nào đó chứa tới hai cung suy ra đường tròn cắt một cạnh của ô vuông đó, chẳng hạn cạnh AB tại hai điểm phân biệt M, N. Gọi O là tâm đường tròn. Xét hình chữ nhật ABYX có AX = 10 (hình chữ nhật này chứa O) (h.39). Gọi Z là giao điểm của hai đường tròn tâm A bán kính 10 và tâm B bán kính 10, sao cho Z nằm trong hình chữ nhật ABYX. Do OA và OB đều lớn hơn 10 nên O nằm trong tam giác cong XYZ (phần nằm trong hình chữ nhật ABYX và nằm ngoài các đường tròn tâm A và B, bán kính 10, xem hình vẽ). Rõ ràng miền trong của các tam giác cong kiểu này đôi một rời nhau nên có cùng lắm một tam giác cong chứa O. Do đó có cùng lắm một ô vuông chứa hai cung trong số 80 cung nói trên. Do đó 80 cung này hoặc nằm trong 80 ô vuông hoặc nằm trong 79 ô vuông.

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. Giả sử M là một đa giác lồi. Ta kí hiệu s là số bé nhất các hình tròn bán kính 1 phủ miền đa giác M, t là số lớn nhất các hình tròn đôi một rời nhau có đường kính 1 và có tâm thuộc miền đa giác. Chứng minh rằng $s \le t$.

Lời giải

Giả sử các hình tròn lần lượt có tâm $A_1, ..., A_t$ thuộc miền đa giác, có đường kính bằng 1 và đôi một rời nhau.

Xét t hình tròn $(A_1 ; 1), ..., (A_t ; 1)$. Rõ ràng t hình tròn này phủ kín miền đa giác M. Thật vậy nếu trái lại, khi đó tồn tại một điểm A_{t+1} thuộc miền đa giác nhưng không thuộc bất kì hình tròn nào trong số vừa nói. Ta có $A_{t+1}A_i > 1$, $\forall i = 1, 2, ..., t$. Vậy $(t + 1)$ hình tròn có đường kính bằng 1 có tâm tại $A_1, ..., A_{t+1}$

đôi một rời nhau và có các tâm thuộc miền đa giác M. Điều này trái với giả thiết t là số lớn nhất. Vậy t hình tròn $(A_1 ; 1), ..., (A_t ; 1)$ phủ kín miền đa giác M. Do s là số bé nhất ta đạt được $s \leq t$.

Bài tập

73. Trên mặt phẳng cho 2005 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Xét tất cả các đoạn thẳng nối các cặp điểm trong số 2005 điểm này. Chứng minh rằng với mỗi đường thẳng Δ không đi qua bất kì điểm nào trong số các điểm nói trên thì số đoạn thẳng bị Δ cắt là một số chẵn.

74. Trên mặt phẳng cho 100 hình tròn có bán kính đôi một phân biệt thoả mãn các điều kiện sau :

i) Không có hai hình tròn nào rời nhau cùng nằm trong một hình tròn khác.

ii) Nếu hai hình tròn có phần chung thì hình tròn lớn chứa hình tròn bé.

iii) Với 10 hình tròn bất kì trong số đang xét luôn tồn tại một cặp hình tròn mà hình tròn lớn chứa hình tròn bé. Chứng minh rằng tồn tại 12 hình tròn $A_1, ..., A_{12}$ trong số trên sao cho A_i nằm trong A_{i+1}, $i = 1, 2, ..., 11$.

75. Trên mặt phẳng cho 6 điểm sao cho với ba điểm bất kì trong chúng là đỉnh của một tam giác không cân. Xét tất cả các tam giác có ba đỉnh là 3 điểm trong 6 điểm này. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh mà nó là cạnh bé nhất của một tam giác đồng thời lại là cạnh lớn nhất của một tam giác khác trong số các tam giác đang xét.

76. Trên mặt phẳng cho 2005 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình vuông sao cho trong hình vuông đó có đúng 1000 điểm trong số các điểm nói trên.

77. Trên mặt phẳng cho 20 điểm phân biệt. Người ta nối một số cặp điểm trong số 20 điểm này lại với nhau, sao cho với ba điểm bất kì trong chúng có ít nhất 2 điểm không được nối với nhau. Chứng minh rằng số đoạn thẳng không vượt quá 100.

78. Trong mặt phẳng cho một đa giác lồi 2006 cạnh. Xét tất cả các tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho. Một điểm P của mặt phẳng không nằm trên bất kì cạnh nào của đa giác đó. Chứng minh rằng số tam giác đang xét chứa điểm P ở trong là một số chẵn.

79. Bên trong một đa giác lồi có một số điểm phân biệt. Chứng minh rằng có thể chia đa giác này thành những đa giác lồi nhỏ mà mỗi chúng chứa một điểm trong số đã cho.

80. Cho hữu hạn hình vuông. Chứng minh rằng có thể cắt mỗi hình vuông thành hữu hạn mảnh sao cho từ các mảnh nhận được ta có thể ghép lại thành một hình vuông.

Chuyên đề 9

ĐỊNH LÍ MÊ-NÊ-LAUYT, ĐỊNH LÍ XÊ-VA

Trong chuyên đề 2 chúng ta đã đề cập tới một số phương pháp chứng minh các điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy như dùng các tính chất về góc, dùng định lí Thales. Ở chuyên đề này ta sẽ tìm hiểu một phương pháp mới cho loại bài toán này.

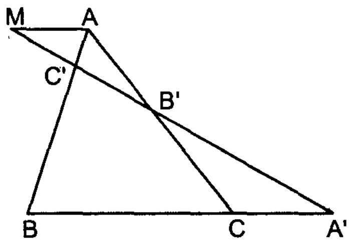
Định lí Mê-nê-lauyt. Cho ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba đường thẳng chứa ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho trong chúng hoặc không có điểm nào, hoặc có đúng hai điểm thuộc cạnh tam giác ABC. Khi đó A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.$$

Chứng minh

Trường hợp 1. Nếu trong ba điểm A', B', C' có đúng hai điểm thuộc cạnh của tam giác ABC, chẳng hạn là B' và C' (h.40).

+ Nếu A', B', C' thẳng hàng



Hình 40

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt B'C' tại M. Ta có :

$$\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B},\ \frac{B'C}{B'A}=\frac{A'C}{AM}.$$

Vậy

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B}.\frac{A'C}{AM}.\frac{A'B}{A'C}=1.$$

+ Ngược lại, nếu $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$

Gọi A" là giao của B'C' với BC. Theo phần thuận ta có

$$\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Suy ra $\frac{A''B}{A''C} = \frac{A'B}{A'C}$.

Do B', C' lần lượt thuộc cạnh CA, AB nên A" nằm ngoài cạnh BC.

Vậy $\frac{A'B}{A'C} = \frac{A''B}{A''C}$ và A', A" cùng nằm ngoài đoạn BC suy ra A" ≡ A'.

Vậy ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

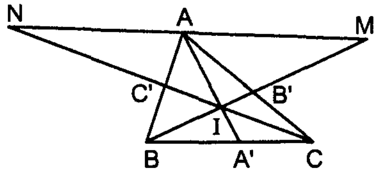
Trường hợp 2. Trong ba điểm A', B', C' không có điểm nào thuộc cạnh tam giác được chứng minh tương tự.

Định lí Xê-va. Cho ba điểm A', B', C' lần lượt thuộc ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Khi đó AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Chứng minh

+ (h.41) Nếu AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm I.



Hình 41

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, giả sử nó cắt BB', CC' tại M, N. Ta có :

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{AM}\ ;\ \frac{C'A}{C'B} = \frac{AN}{BC}\ ;\ \frac{A'B}{A'C} = \frac{AM}{AN}.$$

Vậy $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = \frac{AM}{AN}.\frac{BC}{AM}.\frac{AN}{BC} = 1$ nếu $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$

Gọi I là giao của BB' và CC'. Giả sử AI cắt BC tại A", suy ra A" cũng thuộc cạnh BC. Theo phần trên ta có

$$\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$$

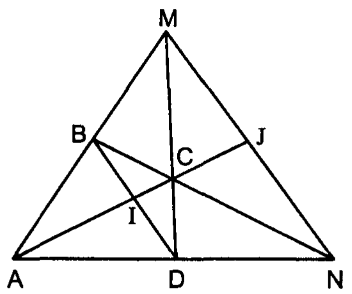
Vậy $\frac{A'B}{A'C} = \frac{A''B}{A''C}$ từ đó suy ra $A \equiv A'$.

Suy ra AA', BB', CC' đồng quy.

Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD có M và N là giao của các cặp cạnh đối AB và CD, AD và BC. Đường thẳng AC cắt BD, MN lần lượt tại I, J.

Chứng minh rằng $\frac{IA}{IC} = \frac{JA}{JC}$.

Giải (h.42)



Hình 42

Áp dụng định lí Mê-nê-lauyt cho tam giác AMC với ba điểm thẳng hàng B, I, D ta có

$$\frac{IA}{IC}.\frac{DC}{DM}.\frac{BM}{BA} = 1 \text{ nên } \frac{IA}{IC} = \frac{DM}{DC}.\frac{BA}{BM}. \quad (1)$$

Áp dụng định lí Mê-nê-lauyt cho tam giác ABC với ba điểm thẳng hàng M, J, N ta có

$$\frac{JA}{JC}.\frac{NC}{NB}.\frac{MB}{MA} = 1 \text{ do đó } \frac{JA}{JC} = \frac{NB}{NC}.\frac{MA}{MB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có điều phải chứng minh tương đương với

$$\frac{DM}{DC}.\frac{BA}{BM} = \frac{NB}{NC}.\frac{MA}{MB} \Leftrightarrow \frac{DM}{DC}.\frac{BA}{MA}.\frac{NC}{NB} = 1 \Leftrightarrow \frac{AB}{AM}.\frac{DM}{DC}.\frac{NC}{NB} = 1.$$

Điều này đúng do định lí Mê-nê-lauyt cho tam giác BMC với ba điểm thẳng hàng A, D, N.

Ví dụ 2. Cho lục giác ABCDEF nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi

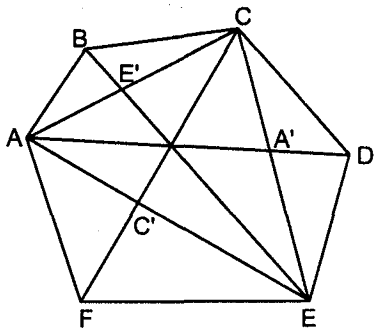
$$AB.CD.EF = BC.DE.FA.$$

Giải (h.43)

Gọi A', C', E' lần lượt là giao của các cặp AD và CD, CF và AE, BE và CA.

Do $\Delta E'BA \backsim \Delta E'CE$ nên

$$\frac{E'A}{E'E} = \frac{AB}{CE}.$$



Hình 43

Do $\Delta E'BC \backsim \Delta E'AE$ nên

$$\frac{E'E}{E'C} = \frac{AE}{BC}.$$

Vậy $$\frac{E'A}{E'C} = \frac{E'A}{E'E}.\frac{E'E}{E'C} = \frac{AB}{BC}.\frac{AE}{CE}. \qquad (1)$$

Tương tự $$\frac{A'C}{A'E} = \frac{CD}{DE}.\frac{AC}{AE}\ ; \qquad (2)$$

$$\frac{C'A}{C'E} = \frac{FA}{FE}.\frac{CA}{CE}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$\frac{E'A}{E'C}.\frac{A'C}{A'E}.\frac{C'E}{C'A} = \frac{AB}{BC}.\frac{CD}{DE}.\frac{FE}{FA}.$$

Do đó theo định lí Xê-va AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{AB}{BC}.\frac{CD}{DE}.\frac{FE}{FA} = 1.$$

Bài tập

81. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại O. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của các cặp đường BC và B'C', CA và C'A', AB và A'B'. Chứng minh rằng ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

82. Cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối AB và CD, AD và BC cắt nhau tại M, N. Chứng minh rằng các trung điểm I, J, K của AC, BD, MN thẳng hàng.

83. Cho lục giác ABCDEF nội tiếp đường tròn (O). Các điểm A', B', C' lần lượt là giao điểm của các cặp AB và DE, BC và EF, CD và AF. Chứng minh rằng ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

84. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm.

85. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng Δ không đi qua đỉnh tam giác cắt các cạnh BC, CA, AB tại lần lượt A', B', C'. Chứng minh rằng các trung điểm của các đoạn AA', BB', CC' thẳng hàng.

86. Cho tam giác ABC có A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Điểm M nằm phía trong tam giác ABC. Các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của MA, MB, MC với B'C', C'A', A'B'. Chứng minh rằng $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ đồng quy.

87. Cho tam giác ABC, một đường thẳng cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba điểm A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

88. Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM lần lượt cắt cạnh đối diện lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ cắt BC, CA, AB tại điểm thứ hai A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

89. Cho tam giác ABC và một đường tròn (O) nằm phía trong tam giác. Các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) nằm trong tam giác ABC, lần lượt tiếp xúc với các cặp cạnh tại các góc A, B, C của tam giác ABC và tiếp xúc ngoài với (O) tại M, N, P. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, BN, CP đồng quy.

90. Cho hai tam giác ABC và A'BC có các đường tròn nội tiếp (I) và (I') cùng tiếp xúc với BC tại một điểm. (I) tiếp xúc với AB, AC tại M, N; (I') tiếp xúc với A'B', A'C' tại M', N'. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, M', N' thuộc cùng một đường tròn.

Chuyên đề 10

ĐƯỜNG THẲNG SIM-SƠN ĐƯỜNG THẲNG STAI-NƠ

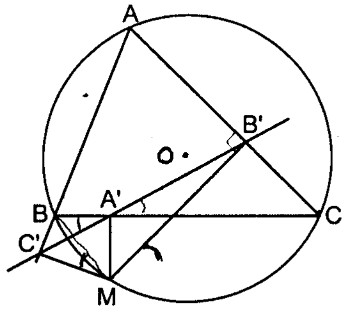
Bài toán. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm M thuộc đường tròn (O). Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng A', B', C' thuộc một đường thẳng. Đường thẳng đó được gọi là đường thẳng Sim-sơn ứng với điểm M của tam giác ABC.

Giải (h.44)

+ Nếu M trùng vào một đỉnh nào đó của tam giác ABC thì điều phải chứng minh là hiển nhiên đúng.

+ Nếu chẳng hạn M thuộc cung BC (cung không chứa A) (h.44).

Hai điểm B' và C' nằm về hai phía của đường thẳng BC. Vì vậy muốn chứng minh A', B', C' thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh $\widehat{BA'C'} = \widehat{CA'B'}$.



Hình 44

Ta có $\widehat{BA'C'} = \widehat{BMC'}$

$\widehat{CA'B'} = \widehat{CMB'}$

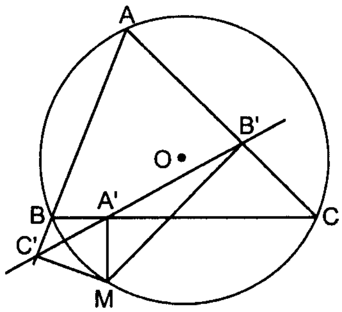
mặt khác $\widehat{BMC'} = \widehat{CMB'}$ (vì $\widehat{BMC} = 180^o - \widehat{BAC} = \widehat{C'MB'}$)

nên $\widehat{BA'C'} = \widehat{CA'B'}$.

Ví dụ 1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ BC, hạ MB' vuông góc với AC, MC' vuông góc với AB. Tìm vị trí của M để B'C' lớn nhất.

Giải (h.45)

Hạ MA' $\perp$ BC. Khi đó A', B', C' thẳng hàng.



Hình 45

Ta có $\widehat{A'C'M} = \widehat{A'BM}$;

$\widehat{A'B'M} = \widehat{A'CM}$.

Vậy $\Delta MB'C' \backsim \Delta MCB$ suy ra

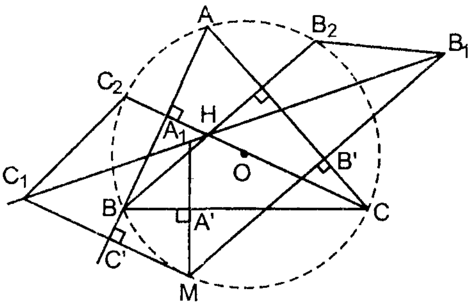
$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{MC'}{BM} \leq 1 \text{ nên } B'C' \leq BC.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi B'C' ≡ BC ⇔ M và A đối xứng nhau qua tâm đường tròn (O).

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thay đổi trên (O). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng với M qua các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

a) Ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. Đường thẳng đi qua ba điểm này được gọi là đường thẳng Stai-nơ ứng với điểm M của tam giác ABC.

b) Đường thẳng chứa ba điểm A_1, B_1, C_1 luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.



Hình 46

Giải (h.46)

a) Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống BC, CA, AB. Khi đó A', B', C' thẳng hàng, mặt khác A', B', C' lần lượt là trung điểm của MA_1, MB_1, MC_1 nên ba điểm A_1, B_1, C_1 cũng thẳng hàng.

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC, B_2, C_2 lần lượt đối xứng với H qua AC, AB. Suy ra B_2, C_2 thuộc (O). Chẳng hạn, ta giải bài toán với trường hợp M thuộc cung BC (cung không chứa A).

Ta có MHC_2C_1, MHB_2B_1 là những hình thang cân do đó:

$$\widehat{C_1HC_2} = \widehat{MC_2H} = \widehat{MAC};$$

$$\widehat{B_1HB_2} = \widehat{MB_2H} = \widehat{MAB}.$$

Do đó $$\widehat{C_1HC_2} + \widehat{B_1HB_2} + \widehat{B_2HC_2} = \widehat{MAC} + \widehat{MAB} + \widehat{B_2HC_2}$$

$$= \widehat{BAC} + \widehat{B_2HC_2} = 180^o.$$

Suy ra ba điểm C_1, H, B_1 thẳng hàng.

Vậy đường thẳng đi qua ba điểm A_1, B_1, C_1 luôn đi qua trực tâm H của tam giác ABC.

Bài tập

91. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm M thuộc cung BC (cung không chứa A), M không trùng với B và C. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{BC}{MA'} = \dfrac{CA}{MB'} + \dfrac{AB}{MC'}$;

b) Đường thẳng B'C' đi qua trung điểm của đoạn nối giữa trực tâm H của tam giác ABC với M.

92. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi d_A là đường thẳng Sim-sơn của tam giác BCD ứng với điểm A. Các đường thẳng d_B, d_C, d_D được định nghĩa một cách tương tự. Chứng minh rằng bốn đường thẳng này đồng quy.

93. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thay đổi trên đường tròn không trùng vào các đỉnh tứ giác. Gọi A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hoặc D' luôn là trực tâm tam giác A'B'C' hoặc không có vị trí nào của M để D' là trực tâm của tam giác này.

94. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B (hai điểm O_1, O_2 nằm về hai phía của AB). Một đường thẳng Δ thay đổi qua A cắt (O_1), (O_2) lần lượt tại C và D khác A (A nằm giữa D và C). Tiếp tuyến tại C của (O_1) và tiếp tuyến tại D của (O_2) cắt nhau tại T. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B xuống các tiếp tuyến này.

a) Tìm vị trí của Δ để BT lớn nhất.

b) Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với một đường tròn cố định.

95. Cho đường tròn (O) và đường thẳng Δ không cắt nó. Điểm M thay đổi trên Δ, kẻ các tiếp tuyến MT, MH với (O). Gọi A là hình chiếu vuông góc của O lên Δ và E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MT, MH. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng TH đi qua một điểm cố định.

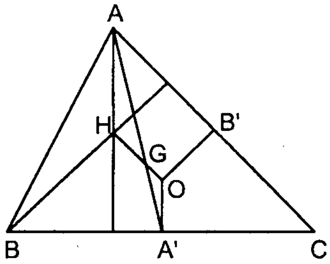
b) Đường thẳng EF đi qua một điểm cố định.

96. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M nằm trong đường tròn. Gọi X, Y, Z, T, U, V là hình chiếu vuông góc của M xuống AB, BC, CD, DA, AC, BD. Gọi N, P, Q là trung điểm của UV, XZ, YT. Chứng minh rằng N, P, Q thẳng hàng.

Chuyên đề 11

ĐƯỜNG THẲNG Ơ-LE – ĐƯỜNG TRÒN Ơ-LE HỆ THỨC Ơ-LE

Bài toán 1. Cho O, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng O, H, G cùng thuộc một đường thẳng (được gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC) và GH = 2GO.



Hình 47

Giải. (h.47)

Hạ $OA' \perp BC$

$OB' \perp CA$.

Suy ra A', B' lần lượt là trung điểm của BC, CA.

Ta có $\Delta HAB \backsim \Delta OA'B'$ (g.g) suy ra

$$\frac{OA'}{HA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2} \text{ do đó } OA' = \frac{1}{2}HA.$$

Gọi G' là giao điểm của AA' với OH suy ra $\dfrac{G'A'}{G'A} = \dfrac{OA'}{HA} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy G' là trọng tâm của tam giác ABC.

Do đó $G' \equiv G$ nên ba điểm H, O, G thẳng hàng và $\dfrac{GO}{GH} = \dfrac{OA'}{HA} = \dfrac{1}{2}$.

Chú ý. Qua lời giải trên ta thấy trong một tam giác khoảng cách từ trực tâm tới mỗi đỉnh gấp hai lần khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tới cạnh đối diện với đỉnh đó.

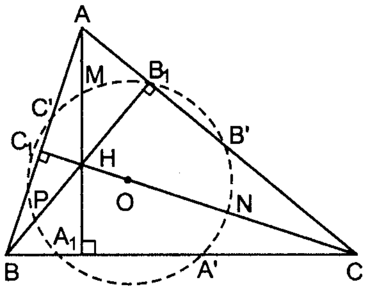
Bài toán 2. Trong tam giác ABC, chứng minh rằng các trung điểm của các cạnh, các chân đường cao, các trung điểm của các đoạn nối từ trực tâm tới mỗi đỉnh thuộc một đường tròn, được gọi là đường tròn chín điểm Ơ-le của tam giác ABC.

Giải (h.48)

Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

A_1, B_1, C_1 lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C.

M, N, P lần lượt là trung điểm HA, HB, HC với H là trực tâm tam giác ABC.



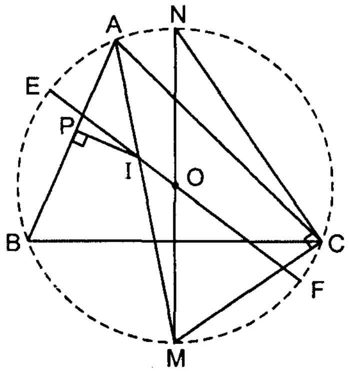
Hình 48

Dễ dàng nhận thấy các điểm B', B_1, C', C_1, P, A_1 cùng nhìn MA' dưới một góc vuông từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O ; R), đường tròn nội tiếp (I ; r). Chứng minh rằng $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Hệ thức này được gọi là hệ thức Ơ-le của tam giác ABC.

Giải (h.49)

Kéo dài AI cắt (O) tại M ≠ A. Gọi N là điểm đối xứng với M qua O.



Hình 49

Hạ IP ⊥ AB.

Ta có ΔAPI ∽ ΔNCM (g.g).

Suy ra $\frac{IP}{MC} = \frac{AI}{MN}$

do đó IP.MN = AI.MC ⇒ 2Rr = AI.MC.

Mặt khác $\widehat{CIM} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{ICM}$ suy ra MC = MI

nên 2Rr = IA.IM.

Giả sử OI cắt (O) tại E, F, khi đó

$$IA.IM = IE.IF = (R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2.$$

Do đó $2Rr = R^2 - OI^2$ suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC đường thẳng Ơ-le đi qua tâm đường tròn chín điểm Ơ-le.

Giải. Sử dụng hình vẽ ở ví dụ 2 nói trên.

Do $OA' = \frac{1}{2}AH = HM$ và OA' // HM nên HMOA' là một hình bình hành do đó trung điểm MA' thuộc OH. Mặt khác MA' là đường kính của đường tròn Ơ-le nên tâm của đường tròn này thuộc đường thẳng Ơ-le OH.

Ví dụ 2. Trong tam giác ABC, chứng minh rằng

$$R \geq 2r.$$

Giải. Theo hệ thức Ơ-le ta có :

$$R^2 - 2Rr = OI^2 \geq 0 \Rightarrow R^2 - 2Rr \geq 0 \Rightarrow R \geq 2r.$$

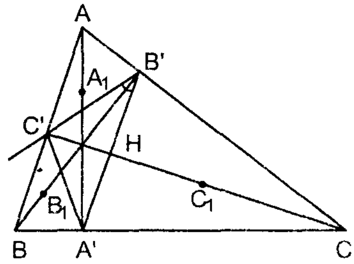
Dấu bằng xảy ra ⇔ I ≡ 0 ⇔ ΔABC đều.

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng các đường thẳng Ơ-le của các tam giác AB'C', CA'B', BA'C' đồng quy tại một điểm.

Giải (h.50)

Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O.

Ta nói góc định hướng của a và b (a trước, b sau) bằng α ; $-90^o \leq \alpha \leq 90^o$ nếu phép quay tâm O góc quay α biến đường thẳng a thành đường thẳng b.



Hình 50

Giả sử tam giác ABC có hướng dương (chiều đi từ A tới B tới C trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ngược chiều kim đồng hồ). Khi đó hai tam giác AC'B' và A'CB' đồng dạng có cùng hướng dương và

$$(AC', A'C) = (C'B', CB') = (B'A, B'A') = 180^o - \widehat{B}. \qquad (1)$$

Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng Ơ-le của $\Delta AC'B'$, $\Delta C'BA'$, $\Delta A'CB'$. Các trung điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt của HA, HB, HC. Khi đó d_1, d_2, d_3 lần lượt đi qua A_1, B_1, C_1. (2)

Từ (1) suy ra $(d_1, d_3) = 180^o - \widehat{B} = (A_1B_1, B_1C_1)$ kết hợp với (2) suy ra giao điểm của d_1 và d_3 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Tương tự giao của d_2 và d_3, d_3 và d_1 cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ hơn nữa do có (2) và d_1, d_2, d_3 không phải là các cạnh tam giác $A_1B_1C_1$ nên chúng đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

Bài tập

97. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC và MN là một đường kính thay đổi của đường tròn. Gọi d_M, d_N lần lượt là các đường thẳng Sim-sơn ứng với M, N của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) d_M và d_N vuông góc với nhau.

b) Giao điểm I của d_M và d_N thuộc một đường tròn cố định.

98. Cho tam giác ABC có trực tâm H và một đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn chín điểm Euler của tam giác. Giả sử A và H nằm về một phía của Δ, B và C nằm về một phía của Δ. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ A và H tới Δ bằng tổng các khoảng cách từ B và C tới Δ.

99. Cho tam giác ABC có trực tâm H, I là tâm đường tròn chín điểm Ơ-le của tam giác ABC. Đường thẳng Δ bất kì sao cho A, B, C, H nằm về cùng một phía của Δ. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ A, B, C, H tới Δ bằng bốn lần khoảng cách từ I tới Δ.

100. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với mỗi điểm M nằm trong tam giác khác tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó, tồn tại điểm $N \neq M$ sao cho các hình chiếu vuông góc của M và N xuống các cạnh của tam giác ABC thuộc cùng một đường tròn.

101. Cho tam giác ABC có góc A tù. D là một điểm sao cho $\widehat{DBA} = \widehat{BAC} = \widehat{DCA}$. Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC đi qua D.

102. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A có tâm I, tiếp xúc với các cạnh của tam giác lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng tâm đường tròn Ơ-le của tam giác MNP thuộc đường thẳng OI.

103. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Điểm A thay đổi trên đường tròn ($A \neq B$, $A \neq C$). Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh tam giác tại M, N, P. Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của tam giác MNP đi qua một điểm cố định.

104. Cho tam giác ABC. Gọi (O ; R), (I ; R_A) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp, bàng tiếp góc A của tam giác. Chứng minh rằng

$$OI^2 = R^2 + 2R.R_A.$$

105. Cho tam giác ABC có góc $A > 90^o$ ($AB \neq AC$) nội tiếp trong đường tròn (O ; R). Đường tròn nội tiếp có tâm I, bán kính r. Đường tròn bàng tiếp góc A có bán kính R_A. Gọi M là điểm chính giữa của cung lớn BC của đường tròn (O). Chứng minh rằng $MA.MI = R(R_A + r)$.

106. Cho tam giác ABC. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tới tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C. Gọi R, d lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{R^2 - d^2} = \frac{1}{d_a^2 - R^2} + \frac{1}{d_b^2 - R^2} + \frac{1}{d_c^2 - R^2}.$$

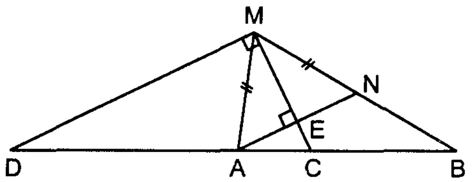
107. Trong tam giác ABC với kí hiệu như bài 106, chứng minh rằng

$$d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 2R^2.$$

Chuyên đề 12

ĐƯỜNG TRÒN A-PÔ-LÔ-NI-UT

Bài toán 1. Cho hai điểm phân biệt A, B và số thực $k \neq 1$. Chứng minh rằng tập hợp những điểm M sao cho $\frac{MA}{MB} = k$ là một đường tròn, được gọi là đường tròn A-pô-lô-ni-ut ứng với hai điểm A, B và tỉ số k.



Hình 51

Giải (h.51)

Gọi C, D lần lượt là các điểm chia trong, chia ngoài đoạn AB theo tỉ số k.

+ Nếu $\frac{MA}{MB} = k$ suy ra

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}.$$

Do đó hoặc $M \equiv D$ hoặc $M \equiv C$ hoặc MC, MD lần lượt là phân giác trong, ngoài của góc AMB hay $\widehat{DMC} = 90^o$.

Suy ra M thuộc đường tròn đường kính CD.

+ Ngược lại nếu M thuộc đường tròn đường kính CD.

* Nếu $M \equiv D$ hoặc $M \equiv C$ thì rõ ràng $\frac{MA}{MB} = k$.

* Nếu $M \neq C$, $M \neq D$. Hạ $AE \perp MC$, AE cắt MB tại N. Ta có

$$\frac{AN}{DM} = \frac{AB}{DB} = 1 - k,$$

$$\frac{AE}{DM} = \frac{AC}{DC} = \frac{1-k}{2}.$$

Suy ra $\frac{AN}{DM} = 2.\frac{AE}{DM}$ do đó 2AE = AN hay ΔMAN cân tại M.

Do đó $$\frac{MA}{MB} = \frac{MN}{MB} = \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} = k.$$

Vậy tập những điểm M sao cho $\frac{MA}{MB} = k$ là đường tròn (O) đường kính CD.

Chú ý

+ Nếu N nằm phía trong đường tròn (O) thì $\frac{NA}{NB} < k$ nếu $k < 1$ và $\frac{NA}{NB} > k$ nếu $k > 1$.

+ Nếu N nằm ngoài (O) thì $\frac{NA}{NB} > k$ nếu $k < 1$ và $\frac{NA}{NB} < k$ nếu $k > 1$.

Ví dụ 1. Cho tam giác không cân ABC. Điểm M thay đổi trong tam giác sao cho $\widehat{AMC} - \widehat{B} = \widehat{AMB} - \widehat{C}$. Chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

Giải (h.52)

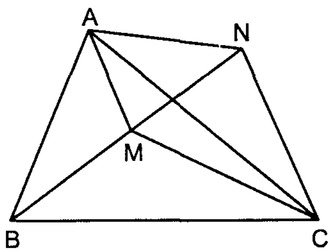
Dựng ra phía ngoài tam giác ABC tam giác ANC sao cho

$$\Delta ANC \backsim \Delta AMB.$$

Khi đó $\Delta ABC \backsim \Delta AMN$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{B}$,

do đó $\widehat{NMC} = \widehat{AMC} - \widehat{AMN} = \widehat{AMC} - \widehat{B}$.



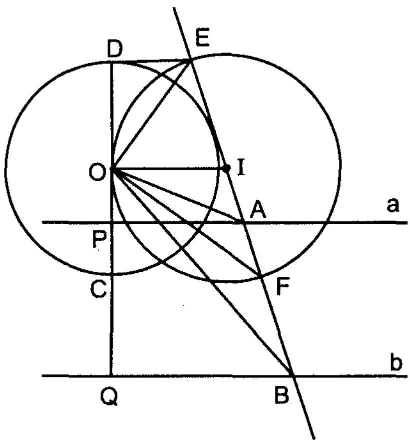
Hình 52

Mặt khác $\widehat{MNC} = \widehat{ANC} - \widehat{ANM} = \widehat{AMB} - \widehat{C}$

nên $\widehat{NMC} = \widehat{MNC} \Rightarrow MC = NC \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$ không đổi.

Suy ra M thuộc một đường tròn cố định.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau và cách nhau một khoảng cách bằng 3. Điểm O cố định cách a một khoảng cách bằng 1, điểm O và đường thẳng b nằm về hai phía của đường thẳng a. Đường thẳng Δ thay đổi cắt a, b lần lượt tại A, B sao cho OB = 2OA. Chứng minh rằng Δ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.



Hình 53

Giải (h.53)

Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với a, cắt a tại P và cắt b tại Q. Lấy C thuộc đoạn PQ sao cho PC = 1.

Gọi D là điểm đối xứng với C qua O. Lấy E, F trên Δ sao cho DE // a, CF // a.

Ta có $$\frac{AF}{FB} = \frac{PC}{CQ} = \frac{1}{2};\ \frac{EA}{EB} = \frac{DP}{DQ} = \frac{1}{2}$$

nên $\frac{FA}{FB} = \frac{OA}{OB} = \frac{EA}{EB}$.

Suy ra OF, OE là các đường phân giác trong và ngoài góc O của tam giác OAB. Do đó $\widehat{EOF} = 90^{o}$. Gọi I là trung điểm EF suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EOF. Hình thang DEFC có OI đường trung bình nên OI ⊥ DC. Suy ra DC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EOF.

Ta có $$\widehat{OEF} = \widehat{FOC} = 90^{o} - \widehat{DOE} = \widehat{DEO}.$$

nên EO là phân giác góc DEF.

Tương tự FO là phân giác góc CFE.

Do đó O cách đều DE, Δ, CF. Vậy Δ luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính CD cố định.

Bài tập

108. Cho đường tròn (O) và hai điểm M, N nằm phía trong đường tròn sao cho O thuộc đoạn MN, OM ≠ ON. Tìm điểm A thuộc (O) sao cho AM, AN lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai B, C khác A và AB = AC.

109. Cho tam giác ABC. Hai điểm phân biệt M, N thay đổi sao cho

$$\frac{MA}{NA} = \frac{MB}{NB} = \frac{MC}{NC} \neq 1.$$

Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

110. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thay đổi trên cung BC (cung không chứa A) của đường tròn (O) (M ≠ B, M ≠ C). Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ACM. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MIJ luôn đi qua một điểm cố định.

111. Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó, AB ≠ CD. Điểm M thay đổi sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$, M không thuộc AB. Chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

112. Cho tam giác ABC. Điểm M thay đổi trên cạnh AB, điểm N thay đổi trên tia đối của tia CA sao cho CN = 2BM. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN có tâm thuộc một đường thẳng cố định.

113. Cho tam giác nhọn không cân ABC, BC = a, CA = b, AB = c. Gọi (O_A), (O_B), (O_C) lần lượt là các đường tròn A-pô-lô-ni-ut ứng với đoạn BC tỉ số $\frac{b}{c}$, CA tỉ số $\frac{c}{a}$, AB tỉ số $\frac{a}{b}$.

Chứng minh rằng (O_A), (O_B), (O_C) có tâm thẳng hàng.

114. Cho tam giác ABC không cân. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC.

Gọi (O_1), (O_2) lần lượt là đường tròn A-pô-lô-ni-ut ứng với đoạn BC theo tỉ số $\frac{IB}{IC}$; $\frac{JB}{JC}$. Chứng minh rằng IJ là một tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).

115. Cho đường thẳng Δ và hai điểm B, C nằm về hai phía của Δ sao cho Δ không là đường trung trực của đoạn BC. Tìm vị trí của M trên đường Δ sao cho :

a) $\frac{MB}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất ;

b) $\frac{MB}{MC}$ đạt giá trị lớn nhất.

116. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm ngoài (O), đường thẳng AB không cắt (O).

Tìm điểm M thuộc đường tròn (O) sao cho :

a) $\frac{MA}{MB}$ đạt giá trị nhỏ nhất ;

b) $\frac{MA}{MB}$ đạt giá trị lớn nhất.

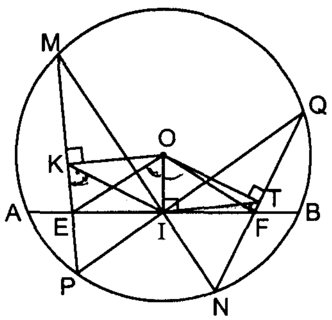
Chuyên đề 13

BÀI TOÁN "CON BƯỚM"

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) một dây cung AB với I là trung điểm. Qua I xét hai dây cung tuỳ ý MN và PQ sao cho các dây cung MP và NQ lần lượt cắt AB tại E, F. Chứng minh rằng I là trung điểm của EF.

(Bài toán "con bướm" đối với đường tròn).

Giải (h.54)



Hình 54

Gọi K, T lần lượt là trung điểm của dây MP, NQ.

Ta có các tứ giác OIEK, OIFT nội tiếp.

Suy ra :

$$\widehat{EOI} = \widehat{EKI}\ ;$$

$$\widehat{FOI} = \widehat{ITF}.$$

Mặt khác $\Delta IMP \backsim \Delta INQ$ và IK, IT lần lượt là hai trung tuyến của ΔIMP, ΔINQ suy ra

$$\widehat{EKI} = \widehat{ITN}.$$

Do đó $\widehat{EOI} = \widehat{FOI}$.

Vậy tam giác OEF có OI vừa là phân giác vừa là đường cao nên nó là tam giác cân. Suy ra IE = IF.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có I là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng Δ đi qua I cắt AB, AC tại M, N. Đường thẳng Δ' đi qua I cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Giả sử M và P nằm về một phía đối với BC và các đường thẳng MP, NQ lần lượt cắt BC tại E, F. Chứng minh rằng IE = IF.

(Bài toán "con bướm" đối với cặp đường thẳng).

Giải (h.55)

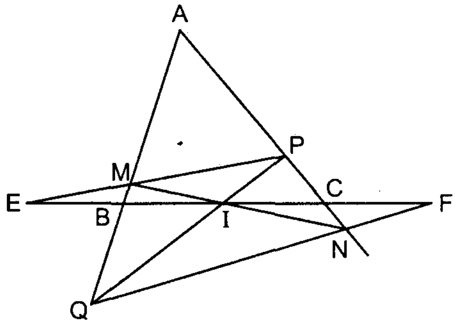
Điều phải chứng minh tương đương với

$$\frac{EB}{EC} = \frac{FC}{FB}.$$

Áp dụng định lí Mê-nê-lauyt cho tam giác ABC với cát tuyến EMP và với cát tuyến FNQ ta có :

$$\frac{EB}{EC}\cdot\frac{PC}{PA}\cdot\frac{MA}{MB}=1 \text{ nên } \frac{EB}{EC}=\frac{PA}{PC}\cdot\frac{MB}{MA}, \quad (1)$$

$$\frac{FC}{FB}\cdot\frac{QB}{QA}\cdot\frac{NA}{NC}=1 \text{ do đó } \frac{FC}{FB}=\frac{NC}{NA}\cdot\frac{QA}{QB}. \quad (2)$$



Hình 55

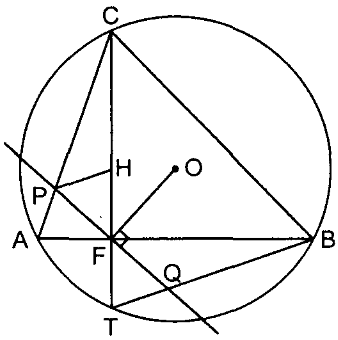
Áp dụng định lí Mê-nê-lauyt cho tam giác ABC với các cát tuyến MIN và QIP ta có :

$$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{NA}{NC}\cdot\frac{IC}{IB}=1 \text{ mà } IB=IC \text{ nên } \frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}, \quad (3)$$

$$\frac{PA}{PC}\cdot\frac{IC}{IB}\cdot\frac{QB}{QA}=1 \text{ suy ra } \frac{PA}{PC}=\frac{QA}{QB}. \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{EB}{EC}=\frac{FC}{FB}$ suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC, CB > CA. Gọi O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác. CF là đường cao xuất phát từ C. Đường thẳng qua F vuông góc với OF cắt AC tại P.



Hình 56

Chứng minh rằng $\widehat{FHP}=\widehat{CAB}$.

Giải (h.56)

Gọi T là điểm đối xứng với H qua AB $\Rightarrow$ T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi Q là giao của PF với BT.

Theo kết quả bài toán con bướm ta có FP = FQ, mặt khác FH = FT. Vậy PH // TQ suy ra

$$\widehat{FHP}=\widehat{FTB}=\widehat{BAC}.$$

Bài tập

117. Cho đường tròn (O), một dây cung AB với I là trung điểm. Qua I xét hai dây cung tuỳ ý MN và PQ sao cho M và P nằm về một phía của AB. Giả sử MP, NQ lần lượt cắt AB tại E, F. Chứng minh rằng IE = IF.

118. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại I và một đường thẳng Δ cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng I là trung điểm đoạn MP khi và chỉ khi nó là trung điểm đoạn NQ.

119. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Gọi O là trung điểm của BC. Đường thẳng Δ đi qua H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng HM = HN khi và chỉ khi OM = ON.

120. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Một đường thẳng Δ qua O cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA lần lượt tại M, N, P, Q khác O. Chứng minh rằng O là trung điểm của đoạn MP khi và chỉ khi nó là trung điểm của đoạn NQ.

121. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), có AB + AC = 2BC. Gọi B', C' lần lượt là điểm chính giữa của cung AC (cung không chứa B) và cung AB (cung không chứa C). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M và N lần lượt là giao của AI với BC, B'C'. Chứng minh rằng IM = IN.

122. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Biết rằng tồn tại bốn điểm A', B', C', D' lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho A'B'C'D' là hình bình hành với tâm O. Chứng minh rằng ABCD cũng là hình bình hành.

123. Cho hai tam giác nhọn A_1BC và A_2BC cùng nội tiếp trong đường tròn (O) ; có trực tâm lần lượt là H_1, H_2. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của H_1H_2 với A_2B và A_2C. Biết $\widehat{A_1H_2H_1} = 90^o$. Chứng minh rằng $A_1M = A_1N$.

124. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^o$. Gọi E là giao của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn nối tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, CDE thuộc đường thẳng BD.

Chuyên đề 14

ĐẲNG THỨC - BẤT ĐẲNG THỨC PTÔ-LÊ-MÊ

Đẳng thức Ptô-lê-mê . Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Khi đó

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

Chứng minh (h.57)

Lấy M thuộc đường chéo AC sao cho

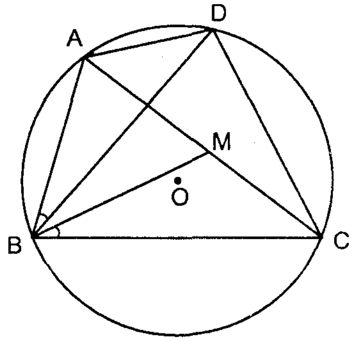
$$\widehat{ABD} = \widehat{MBC}.$$

Khi đó $\Delta ABD \backsim \Delta MBC$ (g.g)

do đó $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{MC}{BC}$ nên AD.BC = BD.MC.

Hơn nữa $\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{BM}{BC}$ và $\widehat{ABM} = \widehat{DBC}$

nên $\Delta ABM \backsim \Delta DBC$.



Hình 57

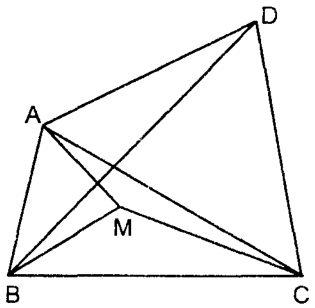
Suy ra $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BD}{CD}$ hay AB.CD = AM.BD.

Vậy $$AD.BC + AB.CD = BD.MC + AM.BD = AC.BD.$$

Bất đẳng thức Ptô-lê-mê : Cho tứ giác ABCD. Khi đó

$$AC.BD \leq AB.CD + AD.BC.$$

Chứng minh. (h.58)



Hình 58

Lấy M nằm trong góc ABC sao cho

$$\widehat{MBC} = \widehat{ABD}\ ;$$

$$\widehat{MCB} = \widehat{ADB}.$$

Khi đó $\Delta ADB \backsim \Delta MBC$

Suy ra $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{MC}{BC}$ hay AD.BC = MC.BD.

Hơn nữa $\Delta ABM \backsim \Delta DBC$ (c.g.c)

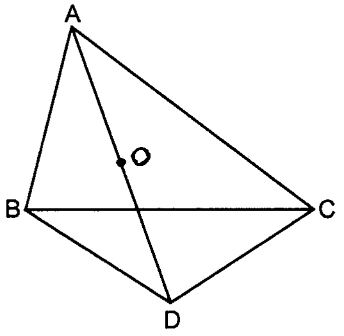
suy ra $$\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BD}{CD} \text{ hay } AB.CD = BD.AM.$$

Vậy $$AD.BC + AB.CD = BD(MC + MA) \geq AC.BD.$$

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung khác đường kính của đường tròn. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC sao cho AB + AC lớn nhất.

Giải. (h.59)

Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.



Hình 59

Đặt DB = DC = a không đổi. Theo đẳng thức Ptô-lê-mê ta có

$$AD.BC = AB.DC + AC.DB = a.(AB + AC).$$

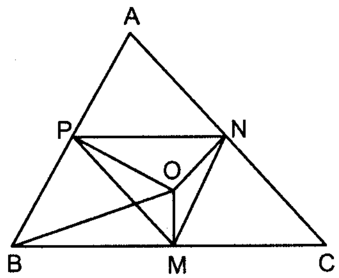
Suy ra $$AB + AC = \frac{BC}{a}.AD.$$

Do BC và a không đổi nên AB + AC lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất khi và chỉ khi A là điểm đối xứng của D qua tâm O của đường tròn.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r). Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh tam giác. Chứng minh rằng

$$x + y + z = R + r.$$

Giải. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Giả sử x = OM, y = ON, z = OP, BC = a, CA = b, AB = c.



Hình 60

Tứ giác OMBP nội tiếp (h.60), theo đẳng thức Ptô-lê-mê ta có

$$OB.PM = OP.MB + OM.PB,$$

do đó $$R.\frac{b}{2} = z.\frac{a}{2} + x.\frac{c}{2}. \quad (1)$$

Tương tự $$R.\frac{c}{2} = y.\frac{a}{2} + x.\frac{b}{2} \quad (2)$$

và $$R.\frac{a}{2} = y.\frac{c}{2} + z.\frac{b}{2}. \quad (3)$$

Mặt khác

$$r\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$$

$$= x.\frac{a}{2} + y.\frac{b}{2} + z.\frac{c}{2}. \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có

$$(R + r)\left(\frac{a + b + c}{2}\right) = (x + y + z).\frac{(a + b + c)}{2}$$ suy ra $R + r = x + y + z$.

Bài tập

125. Cho tam giác ABC có $A > 90^\circ$, nội tiếp trong đường tròn (O, R). Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh tam giác và r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $y + z - x = R + r$.

126. Cho đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ nội tiếp trong đường tròn (O). Chia đa giác thành các tam giác bởi các đường chéo sao cho mỗi tam giác nhận được có ba đỉnh là đỉnh của đa giác. Chứng minh rằng :

a) Số các đường chéo cần dùng không phụ thuộc vào cách chia.

b) Tổng bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác nhận được không phụ thuộc vào cách chia.

127. Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC của đường tròn để AB + 2AC đạt giá trị lớn nhất.

128. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Hai điểm M, N thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$. Gọi P, Q là giao điểm thứ hai khác A của AM và AN với (O). Chứng minh rằng :

a) $AM.AN = -\sqrt{BM.BN.CM.CN} + AB.AC$;

b) $AP + AQ > AB + AC > AM + AN$.

129. Cho tam giác ABC có $A > 90^\circ$ nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong AD của tam giác. Tìm M thuộc cung lớn BC của đường tròn (O) để MB.DC + MC.DB lớn nhất.

130. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi h_a, h_b, h_c, R, r lần lượt là độ dài các đường cao, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng $\min\{h_a, h_b, h_c\} \le R + r \le \max\{h_a, h_b, h_c\}$.

131. Cho lục giác lồi ABCDEF có AB = BC, CD = DE, EF = FA. Chứng minh rằng $\dfrac{BC}{BE} + \dfrac{DE}{DA} + \dfrac{FA}{FC} \ge \dfrac{3}{2}$.

132. Cho lục giác lồi ABCDEF có BC = AB = CD, AF = FE = ED, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $\widehat{DEF} = 60^\circ$. Hai điểm G và H nằm trong lục giác sao cho $\widehat{AGF} = \widehat{CHD} = 120^\circ$. Chứng minh rằng $AG + GF + HC + HD + GH \ge BE$.

133. Cho hai đường tròn đồng tâm, bán kính của đường tròn này gấp đôi bán kính của đường tròn kia. ABCD là tứ giác lồi nội tiếp đường tròn nhỏ. Các tia AB, BC, CD, DA lần lượt cắt đường tròn lớn tại A', B', C', D'.

Chứng minh rằng chu vi tứ giác A'B'C'D' lớn hơn hai lần chu vi tứ giác ABCD.

134. Cho lục giác ABCDEF có các cạnh có độ dài nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong ba đường chéo AD, BE, CF có ít nhất một đường chéo có độ dài nhỏ hơn 2.

135. Cho hai đường tròn $(O_1 ; R_1)$ và $(O_2 ; R_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B (O_1, O_2 nằm về hai phía của AB). Một cát tuyến Δ qua A cắt (O_1), (O_2) lần lượt tại các điểm C, D khác A (A thuộc đoạn CD). Tiếp tuyến tại C của (O_1) cắt tiếp tuyến tại D của (O_2) ở M. Tìm vị trí của Δ sao cho $\dfrac{MC}{R_1} + \dfrac{MD}{R_2}$ đạt giá trị lớn nhất.

136. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và AC = 2AB. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau ở P. Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung BAC.

137. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O ; R). Đường thẳng AO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC tại D, BO kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OCA tại E, CO kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB tại F. Chứng minh rằng $OD.OE.OF \geq 8R^3$.

Chuyên đề 15

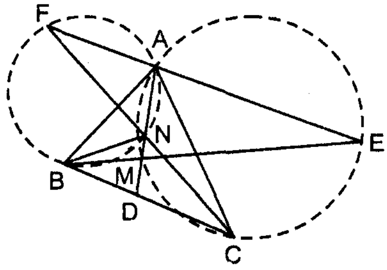
MỘT SỐ BÀI TẬP CHỌN LỌC

Bài toán 1. (h.60) Cho tam giác ABC. Trên phân giác AD có hai điểm M, N sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$. Chứng minh rằng

$$\widehat{ACN} = \widehat{BCM}.$$

Lời giải

Giả sử CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm thứ hai F, BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC tại điểm thứ hai E.



Hình 61

Ta có

$$\widehat{BEC} = \widehat{CAM} = \widehat{MAB} = \widehat{CFB}$$

do đó BCEF là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{EBC} = \widehat{ABN} = \widehat{AFN}$

do đó A, E, F thẳng hàng.

Khi đó $\widehat{ACM} = \widehat{AEM} = \widehat{FCB}$ suy ra $\widehat{BCM} = \widehat{ACN}$.

Bài toán 2. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 60^o$. Một đường thẳng Δ thay đổi qua C cắt AB, AD tại N, M. Gọi P là giao điểm của BM và DN. Chứng minh rằng P thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải. (h.62)

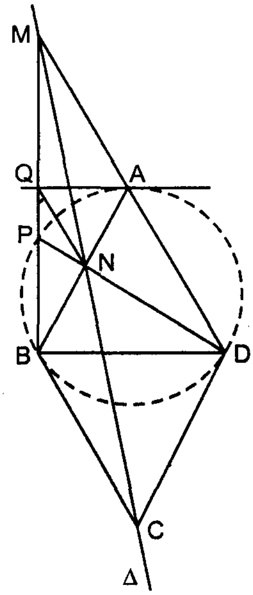
Đường thẳng qua A song song với BD cắt BM tại Q.

Ta có

$$\frac{NA}{AB} = \frac{NA}{CD} = \frac{MA}{MD} = \frac{AQ}{BD}$$

do đó NA = AQ. Mặt khác $\widehat{NAQ} = 60^o$ nên tam giác NAQ đều.

Vậy phép quay tâm A góc quay 60^o biến D thành B, N thành Q. Do đó DN và BQ tạo với nhau một góc 60^o.



Hình 62

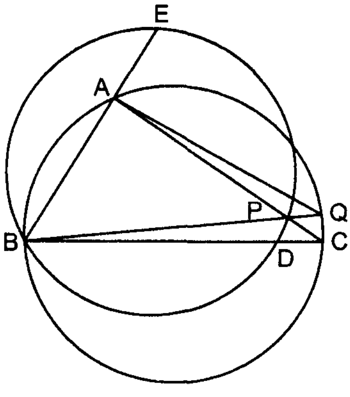
Vậy $\widehat{BPD} = 60^o$. Do đó P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. AB < AC. Gọi D là một điểm trên cạnh BC, E là một điểm trên cạnh BA kéo dài về phía A sao cho BD = BE = CA. Gọi P là một điểm trên AC sao cho E, B, D, P thuộc cùng một đường tròn, Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng AQ + CQ = BP.

Lời giải (h.63)

Vì các tứ giác BEPD, AQCB nội tiếp nên



Hình 63

$$\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEP}.$$

Mặt khác

$$\widehat{AQC} = 180^o - \widehat{ABC} = \widehat{EPD}$$

nên $\Delta AQC \backsim \Delta EPD$. Vậy

$$\frac{AQ}{EP} = \frac{QC}{PD} = \frac{CA}{DE}. \qquad (1)$$

Áp dụng định lý Ptô-lê-mê cho tứ giác BEPD ta có

$$PE.BD + PD.EB = DE.BP. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra AQ.BD + QC.EB = CA.BP.

Mặt khác BD = EB = CA nên AQ + QC = BP.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ nội tiếp trong đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Cung nhỏ BC có M là điểm chính giữa. N là trung điểm cạnh BC. Điểm E đối xứng với I qua N. Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng :

a) Điểm Q thuộc cung nhỏ AC của đường tròn (O) ;

b) BQ = AQ + CQ.

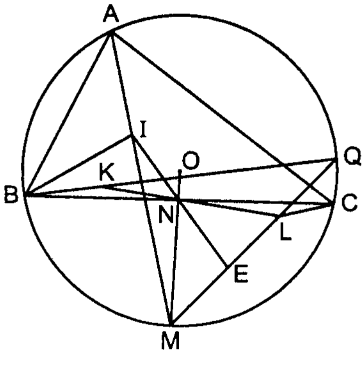
Lời giải (h.64)

a) Ta có

$$\widehat{NCE} = \widehat{IBN} = \frac{1}{2}\widehat{B} < \frac{1}{2}\widehat{A} = \widehat{NCM}.$$

Do đó E nằm trong góc NCM. (1)

Do $\widehat{B} > \widehat{C}$ nên N và C nằm về cùng một phía đối với AM. Do đó E và C nằm về cùng một phía đối với AM. (2)



Hình 64

Từ (1) và (2) suy ra E nằm trong góc $\widehat{AMC}$. Vậy Q thuộc cung nhỏ AC.

b) Lấy K thuộc BQ sao cho QK = QA. (3)

Suy ra

$$\widehat{QAK} = \widehat{AKQ} = \frac{1}{2}\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{B}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAK} + \widehat{CAQ} = \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{IBK} + \widehat{CBQ}.$$

Mặt khác $\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ}$ nên $\widehat{CAQ} = \widehat{IBK}$ hay tứ giác AIKB nội tiếp.

Từ đó ta có $\widehat{IKQ} = \widehat{BAI} = \frac{1}{2}\widehat{A} = \widehat{KQM}$ nên KI // MQ.

Gọi L là giao điểm của KN và MQ, khi đó KILE là hình bình hành. Do đó N là trung điểm của KL.

Vậy BKCL là một hình bình hành.

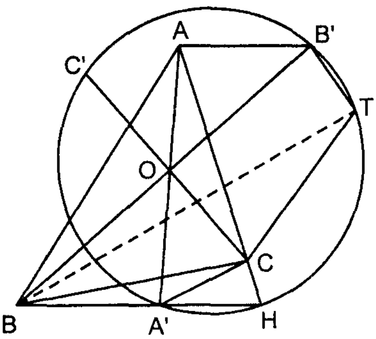
Mặt khác ta có BK // CL, BK = CL và $\widehat{CLQ} = \widehat{BLQ} = \widehat{CQM}$ (4)

nên CL = QC. (5)

Từ (4) và (5) suy ra BK = CL. (6)

Từ (3) và (6) ta có BQ = QA + QC.

Bài toán 5. Cho O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C qua O. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác A'B'C', A'BC, B'CA, C'AB có điểm chung.



Hình 65

Lời giải. (h.65)

Gọi T là giao điểm (khác A') của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C' và tam giác A'BC.

Tứ giác BA'CT nội tiếp một đường tròn do đó

$$\widehat{CTB} = \widehat{CTA'} + \widehat{A'TB} = \widehat{CBA'} + \left(180^\circ - \widehat{A'C'B'}\right)$$

$$= \widehat{CBA'} + \left(180^\circ - \widehat{ACB}\right) \text{ (do A'C' // AC, BC // B'C')}$$

$$= 180^\circ - \left(\widehat{ACB} - \widehat{CBA'}\right)$$

Gọi H là giao điểm của BA' và AC.

Khi đó $\widehat{ACB} - \widehat{CBA'} = \widehat{BHC} = \widehat{CAB'}$ do đó BH // AB'.

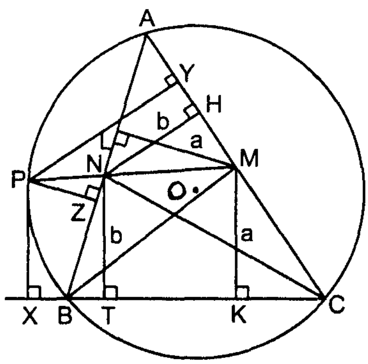
Suy ra $\widehat{CTB} = 180^o - \widehat{CAB'}$. Do đó tứ giác AB'TC nội tiếp hay T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giac B'CA.

Tương tự T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác C'AB.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai phân giác BM và CN của góc B và C. Tia MN cắt (O) tại P. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của P xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

a) PY = PX + PZ ;

b) $\dfrac{1}{PB} = \dfrac{1}{PA} + \dfrac{1}{PC}$.



Hình 66

Lời giải. (h.66)

a) Gọi K, T lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N xuống BC.

H là hình chiếu vuông góc của N xuống AC, L là hình chiếu vuông góc của M xuống AB.

Đặt MK = ML = a

NT = NH = b,

$\dfrac{PN}{PM} = c.$

Dễ dàng tính được :

$$PX = \frac{1}{1-c}NT - \frac{c}{1-c} = \frac{1}{1-c}b - \frac{c}{1-c}a,$$

$$PZ = \frac{c}{1-c}ML = \frac{c}{1-c}a,$$

$$PY = \frac{1}{1-c}NH = \frac{1}{1-c}b.$$

Do đó PY = PX + PZ .

b) Dễ dàng chứng minh được : $\Delta PZB \backsim \Delta PYC$ nên $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{PZ}{PY}$,

$\Delta PXB \backsim \Delta PYA$ nên $\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{PX}{PY}$.

Do đó

$$\frac{PB}{PC}+\frac{PB}{PA}=\frac{PX+PZ}{PY}=1 \text{ hay } \frac{1}{PB}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PC}.$$

Bài toán 7. Cho tam giác nhọn ABC (AB $\neq$ AC). Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại M, N. Gọi O là trung điểm của BC. Đường phân giác của góc BAC và góc MON cắt nhau tại R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BMR và CNR cùng đi qua một điểm nằm trên cạnh BC.

Lời giải. (h.67)

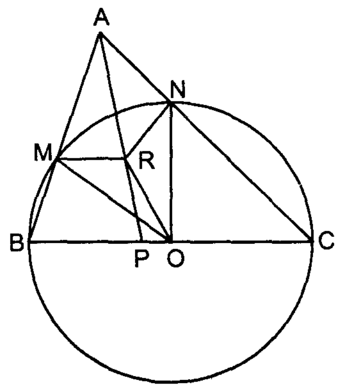
Ta có : $OM = ON$

$\widehat{ROM} = \widehat{RON}$.

Nên $\Delta OMR = \Delta ONR$ (c.g.c).

Vậy RM = RN.

Do R nằm trên đường trung trực của MN và nằm trên phân giác góc MAN nên R là điểm chính giữa của cung MN (cung không chứa A) của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.



Hình 67

Vậy tứ giác AMRN nội tiếp một đường tròn.

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BMR cắt BC tại P khác B.

Do các tứ giác AMRN, BMRP nội tiếp được nên tứ giác CNRP cũng nội tiếp.

Vậy hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMR, CNR cắt nhau tại P thuộc BC.

Bài toán 8. Cho tứ giác ABCD có đường chéo BD không là phân giác của các góc ABC và CDA. Một điểm P nằm trong tứ giác sao cho :

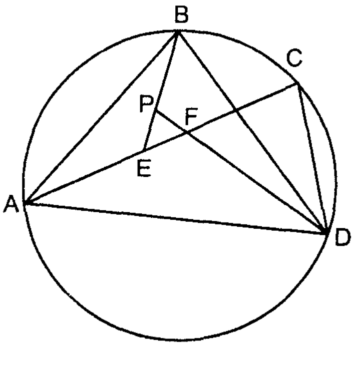
$$\widehat{PBC} = \widehat{DBA},\ \widehat{PDC} = \widehat{BDA}.$$

Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi AP = CP.

Lời giải. (h.68)

Giả sử tứ giác ABCD nội tiếp. Ta chứng minh PA = PC.

Giả sử BP cắt AC ở E, DP cắt AC ở F. Dễ dàng chứng minh được các cặp tam giác đồng dạng $\Delta BCE \backsim \Delta BDA$, $\Delta DAF \backsim \Delta DBC$ suy ra



Hình 68

$$\frac{AF}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{CE}{BC}.$$

Do đó CE = AF. Mặt khác $\widehat{PEF} = \widehat{PFE}$ nên PE = PF.

Từ đó ta có $\Delta PEC = \Delta PFA$ (c.g.c).

Vậy PC = PA.

Ngược lại, giả sử PA = PC. Gọi X, Y tương ứng là giao điểm của CD, DP với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP. Ta có các cặp tam giác đồng dạng $\Delta ADB \backsim \Delta PDX$, $\Delta ADP \backsim \Delta BDX$ nên

$$\frac{BX}{AP} = \frac{BD}{AD} = \frac{XD}{PD}. \qquad (1)$$

Mặt khác $\Delta DPC \backsim \Delta DXY$ nên

$$\frac{XY}{CP} = \frac{XD}{PD}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BX = XY. Do đó

$$\widehat{DCB} = \widehat{XYB} = \widehat{XPY} = \widehat{PDX} + \widehat{PXD} = \widehat{ADB} + \widehat{ADB}$$

$$= 180^{\circ} - \widehat{BAD}.$$

Vậy ABCD nội tiếp.

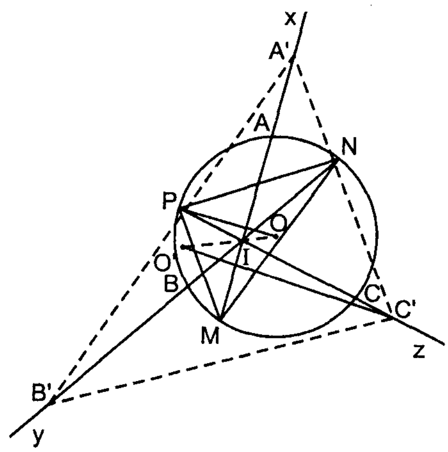
Bài toán 9. Ba tia Ix, Iy, Iz chung gốc I. Lấy cặp điểm A, A' trên Ix ; lấy cặp điểm B, B' trên Iy ; lấy cặp điểm C ; C' trên Iz theo thứ tự đó kể từ I sao cho

$$IA.IA' = IB.IB' = IC.IC'.$$

Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, A'B'C' và I thẳng hàng.

Lời giải. (h.69)

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt các đường thẳng IA, IB, IC lần lượt tại các điểm thứ hai M, N, P. Gọi (O ; R), (O' ; R') lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, A'B'C'.



Hình 69

Ta có $$IA.IA' = IB.IB' = IC.IC'$$

$$IA.IM = IB.IN = IC.IP \text{ do đó } \frac{IA'}{IM} = \frac{IB'}{IN} = \frac{IC'}{IP}.$$

Suy ra hai tam giác A'B'C' và MNP có các cạnh tương ứng song song nên O'C' // OP.

Mặt khác ta có $$\frac{OP}{O'C'} = \frac{R}{R'} = \frac{NP}{C'B'} = \frac{IP}{IC'}.$$

Vậy ba điểm O, I, O' thẳng hàng.

Bài toán 10. Cho BC là một dây cung khác đường kính của đường tròn (O). Điểm A thay đổi trên cung lớn BC. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB tại M, N, P.

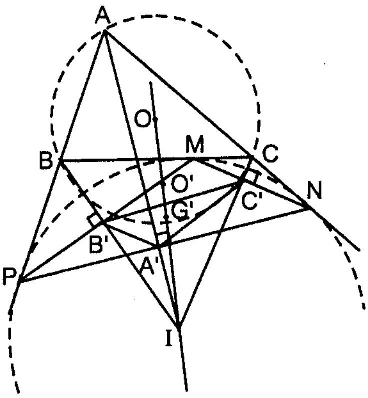
a) Tìm vị trí của A để chu vi tam giác MNP đạt giá trị lớn nhất

b) Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. (h.70)

Khi A thay đổi trên cung lớn BC thì tam giác MNP có góc $\widehat{NMP}$ không đổi bằng $90^o + \frac{\widehat{A}}{2}$. Tam giác ANP luôn cân, có góc A không đổi nên NP lớn nhất khi AB + AC lớn nhất, khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Gọi A_o là điểm chính giữa của cung lớn BC, ứng với vị trí đó ta có tam giác $M_oN_oP_o$ cân tại M_o, $N_oP_o \geq NP$, $\widehat{N_oM_oP_o} = \widehat{NMP}$.



Hình 70

Vậy chu vi $\Delta M_oN_oP_o \geq$ chu vi ΔMNP.

Do đó chu vi tam giác MNP lớn nhất khi $A \equiv A_o$.

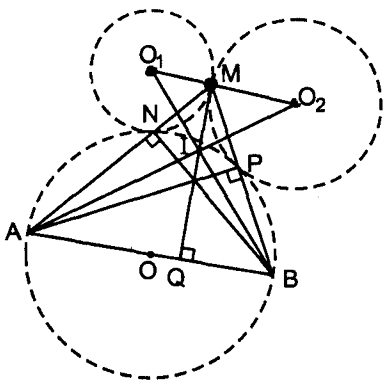
b) Gọi A' là giao điểm của IA với NP, B' là giao điểm của IB với MP, C' là giao của IC với MN. Các điểm O', G' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm tam giác A'B'C'. Ta có

$$IA.IA' = IB.IB' = IC.IC' = r_a^2.$$

Do đó theo bài toán 9 suy ra ba điểm I, O, O' thẳng hàng. Mặt khác ba điểm I, G', O' cùng nằm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác MNP. Do đó đường thẳng Ơ-le của tam giác MNP luôn đi qua O cố định.

Bài toán 11. Cho hai đường tròn $(O_1 ; r_1)$ và $(O_2 ; r_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau. Một đường tròn (O) thay đổi tiếp xúc ngoài với (O_1) và (O_2). Giả sử AB là một đường kính của (O) sao cho AO_1O_2B là một hình thang (AB // O_1O_2). Gọi I là giao điểm của AO_2 với BO_1. Chứng minh rằng I thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải. (h.71)



Hình 71

Gọi M, N, P lần lượt là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O_1), (O_2) ; (O_1), (O) ; (O_2), (O). Đường thẳng MI cắt AB tại Q. Ta có ba điểm O_2, P, O thẳng hàng.

Mặt khác O_2M // OB và

$$\frac{O_2M}{OB} = \frac{r_2}{r} = \frac{O_2P}{OB}$$

nên $$\frac{QA}{QB} = \frac{MO_2}{MO_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Tương tự $\dfrac{PB}{PM} = \dfrac{PO}{PO_2} = \dfrac{r}{r_2}$ và $\dfrac{MN}{NA} = \dfrac{r_1}{r}$.

Do đó $$\frac{QA}{QB}.\frac{PB}{PM}.\frac{NM}{NA} = \frac{r_2}{r_1}.\frac{r}{r_2}.\frac{r_1}{r} = 1.$$

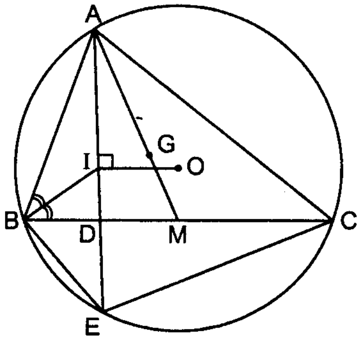
Vậy các đoạn thẳng AP, MQ, BN đồng quy nên MQ cũng là đường cao của tam giác MAB hay MQ $\perp$ AB suy ra MQ $\perp$ O_1O_2.

Vậy I thuộc đường thẳng qua M vuông góc với O_1O_2.

Bài toán 12. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G. Giả sử rằng $\widehat{OIA} = 90^o$. Chứng minh rằng IG và BC song song.

Lời giải. (h.72)

Gọi E là giao điểm thứ hai khác A của AI với đường tròn (O). Khi đó E là điểm chính giữa cung BC (cung không chứa A).



Hình 72

Ta có $EB = EI = EC = IA$.

Theo định lí Ptô-lê-mê

$$EA.BC = EC.AB + EB.AC$$

do đó $2BC = AB + AC$.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{ID} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB + AC}{BD + DC} = \frac{AB + AC}{BC} = 2.$$

Suy ra $\frac{AI}{ID} = 2$.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, khi đó $\frac{AG}{GM} = 2 = \frac{AI}{ID}$. Vậy GI // BC.

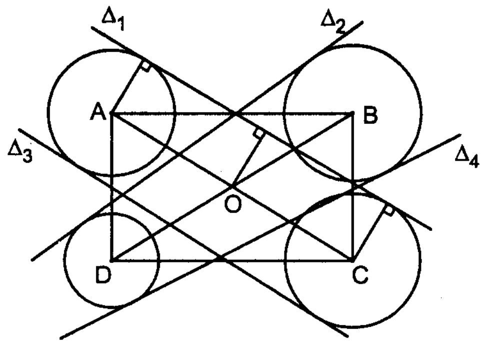
Bài toán 13. Cho hình chữ nhật ABCD và bốn đường tròn $(A ; R_1)$, $(B ; R_2)$, $(C ; R_3)$, $(D ; R_4)$ sao cho $R_1 + R_3 = R_2 + R_4 < AC$. Gọi Δ_1, Δ_3 là hai tiếp tuyến chung ngoài của $(A ; R_1)$ và $(C ; R_3)$; Δ_2, Δ_4 là hai tiếp tuyến chung ngoài của $(B ; R_2)$ và $(D ; R_4)$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với cả bốn đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

Lời giải. (h.83)

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $d_{O/\Delta_1} = \frac{1}{2}(R_1 + R_3)$

(tính chất đường trung bình trong một hình thang), ở đó d_{O/Δ_1} là khoảng cách từ O tới Δ_1.



Hình 73

Tương tự

$$d_{O/\Delta_3} = \frac{1}{2}(R_1 + R_3)$$

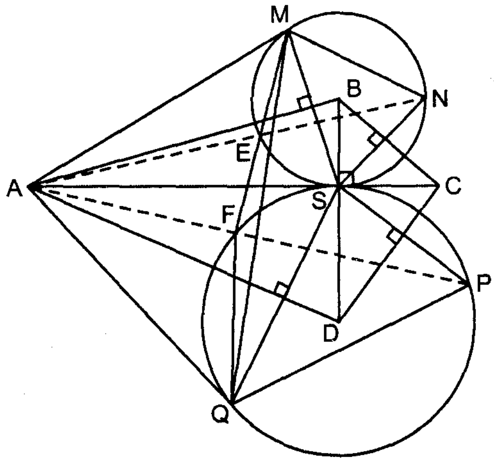
$$d_{O/\Delta_2} = \frac{1}{2}(R_2 + R_4) = d_{O/\Delta_4}.$$

Vậy $d_{O/\Delta_1} = d_{O/\Delta_3} = d_{O/\Delta_4}$.

Do đó Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 cùng tiếp xúc với một đường tròn tâm O.

Bài toán 14. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại S. Gọi M, N, P, Q lần lượt đối xứng với S qua AB, BC, CD, DA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SPQ cắt lại AP tại F. Chứng minh rằng bốn điểm M, E, F, Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. (h.74)



Hình 74

Đường tròn ngoại tiếp tam giác SMN có tâm B và tiếp xúc với AS tại S, AM tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SPQ có tâm D và tiếp xúc với AQ tại Q, AS tại S.

Ta có $\widehat{AMQ} = \widehat{AQM}$

suy ra

$$\widehat{QME} - \widehat{FQM} = \widehat{AQF} - \widehat{AME}$$
$$= \widehat{QPF} - \widehat{MNE}. \quad (1)$$

Ta có

$$AE.AN = AM^2 = AF.AP \text{ hay tứ giác NEFP nội tiếp.}$$

Do đó

$$\widehat{FEM} - \widehat{EFQ} = \left(\widehat{FEN} + \widehat{NEM}\right) - \left(\widehat{EFP} + \widehat{PFQ}\right)$$
$$= \left[\left(180^\circ - \widehat{FPN}\right) + \widehat{NEM}\right] - \left[\left(180^\circ - \widehat{ENP}\right) + \widehat{PFQ}\right]$$
$$= \left(\widehat{ENP} - \widehat{FPN}\right) + \left(\widehat{NSM} - \widehat{PSQ}\right)$$
$$= \left(\widehat{ENC} - \widehat{FPC}\right) + \left(\widehat{NSM} - \widehat{PSQ}\right) \text{ (để ý rằng CP = CS = CN)}$$
$$= \left[\left(\widehat{ENS} + \widehat{NSC}\right) - \left(\widehat{FPS} + \widehat{SPC}\right)\right] + \left(\widehat{NSM} - \widehat{PSQ}\right)$$
$$= \left[\left(\widehat{ENS} + \widehat{NSC}\right) - \left(\widehat{FPS} + \widehat{CSP}\right)\right] + \left(\widehat{NSM} - \widehat{PSQ}\right)$$
$$= \left(\widehat{NSC} + \widehat{NSM}\right) - \left(\widehat{CSP} + \widehat{PSQ}\right) + \left(\widehat{NSM} - \widehat{FPS}\right)$$
$$= \left(\widehat{MSC} - \widehat{QSC}\right) + \left(\widehat{ENN} - \widehat{FPS}\right)$$
$$= \left[\left(90^\circ - \widehat{SNM}\right) - \left(90^\circ - \widehat{SPQ}\right)\right] + \left(\widehat{ENS} - \widehat{FPS}\right)$$

$$= \left(\widehat{SPQ} - \widehat{FPS}\right) - \left(\widehat{SNM} - \widehat{ENS}\right)$$

$$= \widehat{QPF} - \widehat{MNE}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

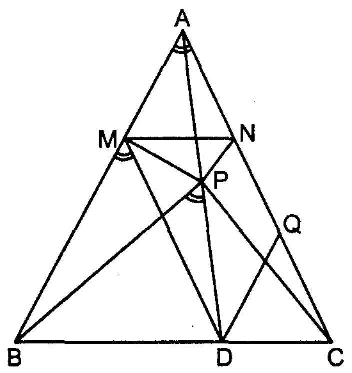
$$\widehat{QME} - \widehat{FQM} = \widehat{FEM} - \widehat{EEQ} \text{ hay } \widehat{QME} + \widehat{EFQ} = \widehat{FEM} + \widehat{FQM}.$$

Do đó tứ giác MEFQ nội tiếp.

Bài toán 15. Cho tam giác ABC cân tại A, trên cạnh BC lấy D sao cho BD : DC = 2 : 1 và trên đoạn AD lấy P sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{BPD}$. Chứng minh rằng

$$\widehat{DPC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Lời giải. (h.75)



Hình 75

Đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại M

Đường thẳng qua M song song với BC cắt AC tại N. Gọi Q là trung điểm của NC.

Ta có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $\quad CQ = NQ = AN.$

Do đó $\dfrac{QC}{CA} = \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{1}{3}$ suy ra DQ // AB.

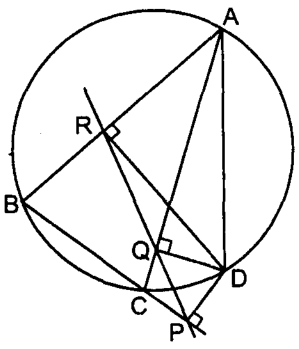
Do $\widehat{BAC} = \widehat{BPD}$ nên $\widehat{BMD} = \widehat{BPD}$. Vậy BMPD là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{MPA} = \widehat{MDB} = \widehat{ACB} = \widehat{MNA}$ suy ra tứ giác AMPN nội tiếp.

Vì BMPD, AMPN là các tứ giác nội tiếp nên CDPN là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa do QD = QC = QN, nên Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDPN.

Vậy $$\widehat{DPC} = \frac{1}{2}\widehat{DQC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Bài toán 16. Cho tứ giác ABCD nội tiếp. Gọi P, Q, R lần lượt là các chân đường vuông góc của D xuống BC, CA, AB. Chứng tỏ rằng PQ = QR khi và chỉ khi phân giác các góc ABC và ADC cắt nhau trên AC.

Lời giải. (h.76)



Hình 76

Theo định lí Sim-sơn, ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

Từ hai bộ bốn điểm (C, D, P, Q) ; (A, D, Q, R) cùng thuộc một đường tròn ta suy ra

$$\Delta DCA \backsim \Delta DPR.$$

Tương tự ta được các cặp tam giác đồng dạng $\Delta DAB \backsim \Delta DQP$, $\Delta DBC \backsim \Delta DRQ$.

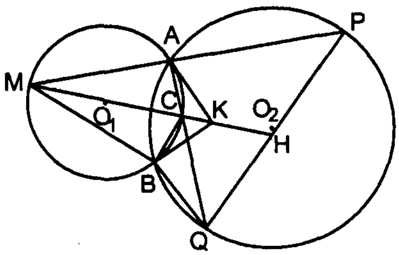
Do đó $$\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}.\frac{PQ}{QR}$$

Suy ra $$PQ = QR \Leftrightarrow \frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}.$$

Điều đó tương đương với chân đường phân giác góc D của tam giác ADC và chân đường phân giác góc B của tam giác ABC trùng nhau, hay các phân giác góc ABC và ADC cắt nhau trên AC.

Bài toán 17. Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau ở hai điểm A và B. Các tiếp tuyến tại A và B của (O_1) cắt nhau ở điểm K. Giả sử M là một điểm nằm trên (O_1) nhưng không trùng vào A và B. Đường thẳng AM cắt (O_2) ở điểm thứ hai P, đường thẳng KM cắt (O_1) ở điểm thứ hai C và đường thẳng AC cắt (O_2) ở điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ nằm trên đường thẳng MC.

Lời giải. (h.77)



Hình 77

Gọi H là giao điểm của MC với PQ. Ta cần chứng minh H là trung điểm của MQ.

Ta có

$$\Delta KAC \backsim \Delta KMA \text{ suy ra } \frac{MA}{CA} = \frac{KA}{KC}.$$

Tương tự

$$\Delta KBC \backsim \Delta KMB \text{ suy ra } \frac{MB}{CB} = \frac{KB}{KC}.$$

Mặt khác KA = KB nên

$$\frac{MA}{CA} = \frac{MB}{CB} \text{ do đó } AC.\,BM = BC.AM. \qquad (1)$$

Dễ dàng nhận thấy $\Delta BMP \backsim \Delta BCQ$ suy ra

$$\frac{BC}{BM} = \frac{CQ}{MP}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $$\frac{CA}{CQ}.\frac{MP}{MA} = 1.$$

Sử dụng định lí Mê-nê-lauyt cho tam giác QPA với cát tuyến MCH ta có

$$\frac{MP}{MA}.\frac{CA}{CQ}.\frac{HQ}{HD} = 1.$$

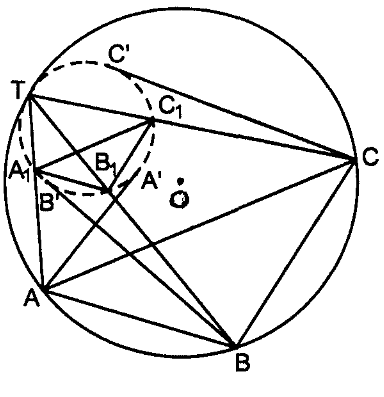
Do đó HQ = HD.

Bài toán 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') nằm trong (O) tiếp xúc với (O) tại T thuộc cung AC (cung không chứa B). Kẻ các tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (O'). Chứng minh rằng

$$BB'.AC = AA'.BC + CC'.AB.$$

Lời giải. (h.78)

TA, TB, TC cắt đường tròn (O') tại các điểm thứ hai A_1, B_1, C_1.



Hình 78

Khi đó $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ hơn nữa chúng có các cạnh tương ứng song song.

Ta có :

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1B_1}{AB} \text{ và}$$

$$\left(\frac{TA_1}{AA'}\right)^2 = \frac{TA_1^2}{AA'^2} = \frac{TA_1^2}{AA_1.AT}$$

$$= \frac{TB_1^2}{BB_1.BT} = \left(\frac{TB_1}{BB'}\right)^2.$$

Do đó $$\frac{TA_1}{AA'} = \frac{TB_1}{BB'}.$$

Tương tự $$\frac{TA_1}{AA'} = \frac{TC_1}{CC'}.$$

Vậy $$\frac{TA_1}{AA'} = \frac{TB_1}{BB'} = \frac{TC_1}{CC'} \text{ do đó } \frac{TA}{AA'} = \frac{TB}{BB'} = \frac{TC}{CC'}. \qquad (1)$$

Theo định lí Ptô-lê-mê ta có

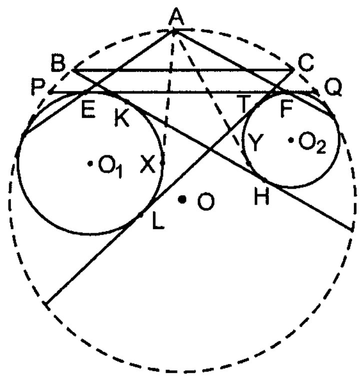
$$TB.AC = TA.BC + TC.AB. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $BB'.AC = AA'.BC + CC'.AB.$

Bài toán 19. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O). Tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) cắt (O) tại bốn điểm. Gọi B, C là hai trong bốn điểm đó sao cho B, C nằm về cùng một phía đối với O_1O_2. Chứng minh rằng BC song song với một tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2).

Lời giải. (h.79)

Kẻ các tiếp tuyến chung trong KH, LT của (O_1) và (O_2). Giao điểm của KH, LT với (O) lần lượt là B, C.



Hình 79

Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF của (O_1) và (O_2) sao cho E và B nằm về cùng một phía đối với O_1O_2. Các điểm M, N lần lượt là các tiếp điểm của (O_1), (O_2) với (O).

EF cắt (O) tại P, Q. Ta sẽ chứng minh BC // PQ.

Gọi A là điểm chính giữa của cung PQ của đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AX, AY của (O_1), (O_2).

Dễ dàng chứng minh được ba điểm A, E, M thẳng hàng, ba điểm A, F, N thẳng hàng và tứ giác MEFN nội tiếp. Do đó

$$AX^2 = AE.AM = AF.AN = AY^2 \text{ hay } AX = AY.$$

Áp dụng bài toán 18 cho tam giác ABQ nội tiếp đường tròn (O) và đường tròn (O_1) tiếp xúc với (O) tại M, ta có

$$AX.PQ = BK.AC + CL.AB.$$

Tương tự $AY.PQ = BH.AC + CT.AB.$

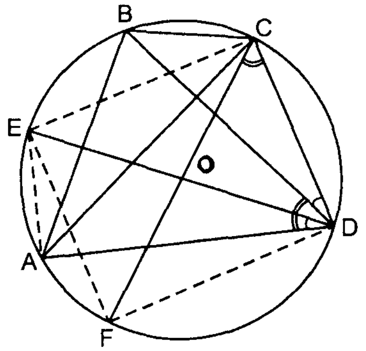
Suy ra $AC(BH - BK) = AB(CL - CT)$

do đó $AC.KH = AB.TL$ hay $AC = AB.$

Vậy A là trung điểm cung BC, do đó PQ // BC.

Bài toán 20. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC.CD + AB.BD}{BC.BA + DC.DA}.$$



Hình 80

Lời giải. (h.80)

Lấy E, F thuộc đường tròn sao cho

$$\widehat{CDB} = \widehat{ADE},$$

$$\widehat{BDA} = \widehat{DCF}.$$

Khi đó

AE = BC, FD = AB, EC = AB, BF = AD.

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp AECD và BCDF ta có :

$$AC.ED = AE.CD + AD.EC = BC.CD + AD.AB \quad (1)$$

và
$$BD.CF = BC.DF + BF.CD = BC.AB + AD.CD. \quad (2)$$

Mặt khác $\widehat{CDE} = \widehat{CDB} + \widehat{BDE} = \widehat{ADE} + \widehat{BDE} = \widehat{ADB} = \widehat{FCD}$

do đó $\widehat{FDC} = \widehat{FDE} + \widehat{EDC} = \widehat{FCE} + \widehat{FCD} = \widehat{ECD}$ suy ra ED = FC. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 21. Cho tam giác ABC cân ở A. Kí hiệu x, y, z lần lượt là khoảng cách MA', MB', MC' từ một điểm M nằm trong tam giác tới các đường thẳng BC, CA, AB. Giả sử $x^2 = yz$, chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải. (h.81)

Tứ giác BC'MA' và A'MB'C nội tiếp được nên

$$\widehat{A'MC'} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{A'MB'} = 180^o$$

và
$$\widehat{MB'A'} = \widehat{MCA'}.$$

Mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ suy ra $\widehat{A'MC'} = \widehat{A'MB'}$.

Ta lại có $\dfrac{CM}{MA'} = \dfrac{MA'}{MB'}$ suy ra

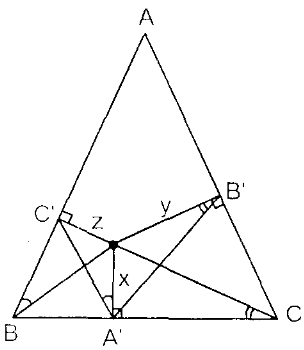
$$\Delta C'MA' \backsim \Delta A'MB' \text{ (c.g.c)}.$$

Do đó $\widehat{C'A'M} = \widehat{A'B'M} = \widehat{MCA'}$.

Mặt khác $\widehat{MC'A'} = \widehat{MBA'}$ nên $\Delta BMC \backsim \Delta C'MA'$.

Do đó $\widehat{BMC} = \widehat{A'MC'} = 180^o - \widehat{B}$ không đổi.

Vậy M thuộc một đường tròn cố định.



Hình 81

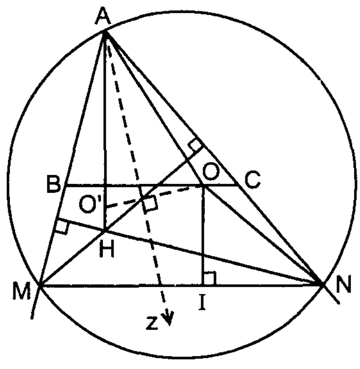
Bài toán 22. Cho tam giác nhọn ABC. Điểm O thay đổi trên BC. Đường tròn tâm O bán kính OA cắt AB, AC lần lượt tại các điểm thứ hai M, N. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác AMN thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải. (h.92)

Gọi H trực tâm của AMN, I là trung điểm cạnh MN.

Gọi Az tia phân giác của góc BAC.

Ta có $\widehat{HAM} = \widehat{OAN}$ nên Az cũng là tia phân giác của góc OAH. Gọi O' đối xứng với O qua Az. Khi đó O' thuộc AH. Khi O thay đổi trên BC thì O' thay đổi trên đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng BC qua Az.



Hình 82

Tam giác OIN có góc $\hat{I} = 90^o$, $\widehat{ION} = \widehat{BAC}$ không đổi nên $\dfrac{ON}{OI}$ không đổi.

Mặt khác AH = 2.OI nên $\dfrac{OA}{OI}$ không đổi.

Do đó $\dfrac{AO'}{AH}$ không đổi. Hơn nữa O' thuộc Δ cố định nên H thuộc một đường thẳng Δ' song song với Δ.

Bài tập

138. Chứng minh rằng nếu hai hình chữ nhật bằng nhau được xếp sao cho biên của chúng cắt nhau tại 8 điểm (như hình 193), thì diện tích phần chung của chúng lớn hơn nửa diện tích của hình chữ nhật.

139. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh bốn điểm H_1, H_2, H_3, H_4 cùng nằm trên một đường tròn.

140. Điểm I nằm trong tam giác ABC và thoả mãn $\widehat{AIB} = \widehat{BIC} = \widehat{CIA} = 120^o$.

Chứng minh rằng ba đường thẳng Ơ-le của các tam giác ABI, BCI và CAI đồng quy.

141. Gọi O, I và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Khi đó, nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH đi qua một trong các đỉnh của tam giác ABC thì phải đi qua một đỉnh khác của tam giác ABC.

142. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, trực tâm H, đường cao AK ($K \in BC$). Giả sử một đường thẳng qua K vuông góc với OK cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Các tia MH, NH cắt AC, AB thứ tự tại P, Q. Chứng minh rằng tứ giác APHQ nội tiếp được.

143. Tam giác ABC có trực tâm H, đường cao BE. Điểm P trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vẽ các hình bình hành PAQB và PARC. Giao điểm AQ và HR là X. Chứng minh rằng EX song song với AP.

144. Cho tam giác ABC nhọn. Điểm O nằm trong tam giác thoả mãn

$$AB + BO = AC + CO.$$

Lấy P bất kì trên cạnh BC. Qua P kẻ PX song song với CO, PY song song với BO ($X \in AB$, $Y \in AC$). Chứng minh rằng chu vi tứ giác AXPY không đổi khi P di chuyển trên BC.

145. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Một đường tròn (O_1) qua B và C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Đường tròn (O_2) qua ba điểm A, D, E cắt (O) tại K ($K \neq A$). Chứng minh rằng $\widehat{AKO_1} = 90^o$.

146. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Giả sử CD, EF là hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (C, E ∈ (O) ; D, F ∈ (O')), điểm A gần CD hơn B). Gọi Δ_1 là đường thẳng qua A tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và Δ_2 là đường thẳng qua B tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh rằng các đường thẳng Δ_1, Δ_2, CD, EF đồng quy.

147. Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác đó. Giả sử AM, BM, CM tương ứng cắt BC, CA, AB tại A_o, B_o, C_o. Các đường tròn đường kính AA_o và BC cắt nhau tai A_1, A_2. Các đường tròn đường kính BB_o và CA cắt nhau tại B_1, B_2. Các đường tròn đường kính CC_o và AB cắt nhau tại C_1, C_2. Chứng minh rằng A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 thuộc cùng một đường tròn.

148. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Điểm M nằm trong tam giác đó. Đường thẳng qua H vuông góc với AM cắt BC tại A_1. Đường thẳng qua H vuông góc với BM cắt CA tại B_1. Đường thẳng qua H vuông góc với CM cắt AB tại C_1. Chứng minh rằng ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

149. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại M ((O') chứa trong (O)). Giả sử P và N là hai điểm bất kì thuộc (O'). Qua P và N kẻ các tiếp tuyến với (O') cắt (O) tại A, C và B, D. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACD, BCD nằm trên NP.

150. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại I và cùng tiếp xúc trong với (O). Kẻ tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) cắt (O) tại B, C. Qua I kẻ tiếp tuyến chung với (O_1) và (O_2) cắt (O) tại A (A thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ BC với (O_1), (O_2). Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

151. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AA', BB', CC'. Gọi H là trực tâm tam giác. K là trung điểm của AH và I là giao điểm của B'C' với AH. Chứng minh rằng I là trực tâm tam giác KBC.

152. Cho (O) và K nằm ngoài (O) vẽ các tiếp tuyến KA, KT với (O).

Một đường thẳng qua A cắt (O) tại B, cắt KT tại C sao cho B là trung điểm của AC, KB giao với (O) tại L. Chứng minh rằng LT song song với BC.

153. Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). Đường thẳng AD cắt BC tại F, AC cắt BD tại E. Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm của EF, AB, CD. Chứng minh rằng hai tam giác IME và IEN đồng dạng.

154. Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Điểm M nằm trong tam giác sao cho

$$\widehat{BMC} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{A}.$$

Qua M kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB, AC lần lượt tại X, Y.

Vẽ MZ, MT lần lượt song song với AB, AC. Gọi N là giao điểm của XZ và YT.

Chứng minh rằng tứ giác ABNC là tứ giác nội tiếp.

155. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Một đường thẳng qua G cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{9} \le \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} < \frac{1}{2}.$$

156. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, CM là trung tuyến. Các tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau ở D. Chứng minh rằng $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$.

157. Cho tam giác ABC. Đường tròn (O_1) qua A tiếp xúc với BC tại C. Đường tròn (O_2) qua B tiếp xúc với AC tại C. Đường tròn (O_1) cắt (O_2) tại điểm thứ hai P. Gọi O, R lần lượt là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $CP \leq R$;

b) CP đi qua một điểm cố định khi C thay đổi trên đường tròn (O).

158. Ngũ giác ABCDE nội tiếp đường tròn (O ; R) sao cho AB = BC = DE = R. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm CD, AE. Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác đều.

159. Trên đường thẳng a lấy ba điểm A, B, C theo thứ tự đó. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC dựng các tam giác vuông cân ABE (AE = EB) và BCD (BD = DC). Gọi S là giao của EC và AD. Chứng minh : $BS \perp ED$.

160. Đường tròn (O ; R) và (O' ; R') cắt nhau ở A và B. Từ điểm C trên tia đối của tia AB kẻ các tiếp tuyến CD và CE với (O) (E nằm trong đường tròn (O')). Các đường thẳng AE, AD cắt đường tròn (O') tại N, M. Chứng minh DE đi qua trung điểm MN.

161. Cho ba đường tròn (O), (O_1), (O_2) như sau : (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại W và cùng tiếp xúc trong với (O). Ba điểm A, B, C thuộc (G) sao cho BC là tiếp tuyến chung ngoài của (O_1), (O_2) và WA là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn này, W và A nằm về cùng một phía của BC. Chứng minh rằng W là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

162. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác. D là điểm đối xứng với A qua BC, E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi OH = 2R.

163. Cho tam giác $A_1A_2A_3$ nhọn với các đường cao A_1K_1, A_2K_2, A_3K_3. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 lần lượt tại L_1, L_2, L_3. Gọi (d_1) là đường thẳng đối xứng với K_1K_2 qua L_1L_2. Các đường thẳng (d_2), (d_3) được xác định tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, d_2, d_3 đôi một cắt nhau trên đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$.

164. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Điểm Q nằm trên (O_2). Các đường thẳng AQ, BQ cắt lại (O_1) lần lượt tại C, D. Các tiếp tuyến tại A và B của (O_2) cắt nhau tại P. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của CD.